



# XXIX. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc

2023. április 21.

## 12. évfolyam

1. Dani és Ede az összes olyan négyjegyű pozitív egész számokat leírta a füzetébe, amelyekben nem szerepel nulla számjegy, és bármely két számjegye különböző. Dani ezek közül azokat írta fel növekvő sorrendben, amelyeknek a második számjegytől kezdve mindegyik számjegye nagyobb volt az előzőnél. Ede pedig azokat írta fel növekvő sorrendben, amelyeket Dani nem írt fel. Melyik volt a 60. felírt szám Dani, illetve Ede listáján?
2. Egy téglatest élei hosszának mérőszámai pozitív egész számok, térfogata 2023 egység. Ha valaki elárulná a téglatest felszínének mérőszámában az első számjegyet vagy a számjegyek összegét, önmagában egyik információ sem lenne elegendő az élek meghatározásához. Mekkora a téglatest élei?
3. Mennyi az  $A = (8 - 3 \operatorname{tg}^2 x)^2 + (8 + 3 \operatorname{ctg}^2 x)^2$  kifejezés legkisebb értéke? Hol veszi fel ezt a legkisebb értéket a kifejezés?
4. Az  $ABC$  háromszögben az  $AB$  oldal mértéke a másik két oldal mértékének négyzetes közepe:  $AB = \sqrt{\frac{AC^2 + BC^2}{2}}$ . Az  $ABC$  háromszög  $S$  súlypontjából a  $CA$ ,  $AB$  és  $BC$  oldalegyenesekre állított merőlegesek talppontja legyen  $N$ ,  $P$  és  $Q$ . Bizonyítsa be, hogy az  $NPQ$  háromszög egyenlő szárú.
5. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:
$$\frac{x}{4} = (\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1).$$
6. Legyen az  $ABC$  derékszögű háromszög beírt és körülírt körének sugara rendre  $r$  és  $R$ , az  $AB$  átfogóhoz tartozó magasság  $CD$ . Rajzoljuk meg azt a  $CD$  oldalhosszúságú  $CEFG$  négyzetet, amelynek  $E$  és  $G$  csúcsa rendre az  $AC$  és  $BC$  szakaszokon van. Legyen az  $ABC$  háromszög és a  $CEFG$  négyzet közös részének területe  $T$ , a  $CEFG$  négyzetnek az  $ABC$  háromszöggel nem fedett részének területe  $t$ .
  - (a) Bizonyítsa be, hogy  $\frac{t}{T} = \frac{r}{2R}$ .
  - (b) Milyen határok között változhat  $\frac{t}{T}$  értéke?