

## Helyi tanterv

### – négy évfolyamos speciális matematika –

9-10. évfolyamon heti 6-6 óra, 11. évfolyamon 7 óra, 12. évfolyamon 8 óra

Pirossal a specmatos kiegészítések a középszinthez, illetve az emelt szinthez képest

Kékkel az emelt érettségi követelmények miatti kötelező kiegészítések

A középfokú képzés során a matematika tanulása-tanítása tekintetében az egyik legfontosabb feladat a tanuló önálló, rendszerezett, logikus gondolkodásának kialakítása, fejlesztése. A 9. évfolyamtól kezdve a spirális felépítésnek megfelelően – a korábbi képzési szakaszok során megszerzett készségekre, képességekre és ismeretekre alapozva – egyre absztraktabb formában épül fel a matematika belső struktúrája (fogalmak definíciója, tételek, bizonyítások).

Az 1–4. és 5–8. évfolyamos képzés nevelési-oktatási szakaszait jellemző tanuláshoz és tanításhoz képest a 9–12. évfolyamokon fokozatosan hangsúlyosabbá válik a matematika deduktív jellege. Az új fogalmakat, algoritmusokat, ismereteket viszont továbbra is induktív módon, szemléltetéssel, felfedeztetéssel, tanulói tevékenységekre építve, a valósághoz kapcsolva kell bevezetni.

Jól megválasztott problémák tárgyalása során válik a tanulók számára is szükségessé az új fogalmak bevezetése és pontos definiálása. Tanári irányítással a tételek, általános összefüggések is felfedeztetetők a tanulókkal. Ezen folyamat során fejlődik a tanulók szintetizáló és modellalkotó képessége. A felfedezett tételek és összefüggések egy része bizonyítás nélkül is gyarapítja a matematikai eszköztárat. Néhány tétel bizonyítása azonban elengedhetetlen része a matematika tanításának, hiszen a bizonyításokon keresztül mutatható meg a matematika logikus és következetes felépítése. Az új fogalmak megalkotása, az összefüggések, stratégiák felfedezése és az ismereteknek feladatok, problémák megoldása során történő tudatos alkalmazása fejleszti a kombinatív készséget, a meglévő ismeretek mobilizálásának képességét, valamint a problémamegoldó gondolkodás eltérő típusainak adekvát használatát. Ennek a folyamatnak az eredményeképpen a tanuló meg tudja állapítani adott állítás, tétel érvényességi és alkalmazási körét, megállapításai, állításai mellett logikusan tud érvelni. A matematika tanulásának-tanításának egyik fő célja, hogy fejlődjön a tanuló mérlegelő gondolkodása, az adatok elemzését, szintézisét és értékelését lehetővé tevő készségek és képességek rendszere. A matematikai játékok, logikai feladványok fejlesztik a stratégiaalkotást, az algoritmikus gondolkodást, a kreativitást és a gondolkodás rugalmasságát.

Ebben a nevelési-oktatási szakaszban az ismert számok köre az irracionális számokkal bővül, valamint új műveletek bevezetésére és már ismert műveletek alkalmazásának bővítésére kerül sor a permanenciaelv alapján. Ezen folyamat során a tanuló egyre inkább képes lesz rá, hogy változatos matematikai objektumokat jelölő szimbólumokkal végezzon műveleteket.

A matematika a maga hagyományos és modern eszközeivel segítséget ad a természettudományok, az informatika, a technika és a humán tanulási területek ismeretanyagának tanulmányozásához, a mindennapi problémák, a természeti és a gazdasági folyamatok értelmezéséhez és kezeléséhez. Ehhez – több más fogalom mellett – szükséges a függvény fogalmának változatos (nemcsak számhalmazokon értelmezett) példák mentén történő kiterjesztése.

A tanuló a matematika szaknyelvét érti és tudatosan használja. Életkorának megfelelő matematikai, matematikatörténeti szöveget képes önállóan olvasni, értelmezni. Mind írásban, mind szóban képes gondolatait a matematika szaknyelvének szabatos alkalmazásával közölni. A tanuló különböző

forrásokat (tankönyv, függvénytáblázat, saját jegyzet, digitális források) használhat az órákon és a számonkérések alkalmával, bizonyos tételek, azonosságok, képletek felidézésére.

A tanuló társaival közösen tervez és hajt végre kooperatív tevékenységeket, projekteket. A közös munkában érvel, képes a vitára, az érvei ütköztetésére. Mérlegeli és kontrollálja mind a társai, mind a saját véleményét.

Ebben az életkorban is érvényesülnie kell a tanuló érdeklődésének, adottságának, absztrakciós szintjének megfelelő differenciálásnak. Ez a differenciálás jelentheti a NAT-ban leírt tananyagtartalmaknak a lehetőségekhez igazított bővítését is.

A tanuló digitális eszközöket, a tanulást, a szemléltetést, a tapasztalatszerzést és a felfedezést segítő szoftvereket, digitális információforrásokat használ, a matematika alkalmazását segítő számítógépes programokat ismer meg. Aktív résztvevője a tanulási-tanítási folyamatnak, ami lehetővé teszi azon kompetenciáinak és tervezési stratégiáinak a fejlődését, amelyek segítik a mai gyorsan változó világban való eligazodást és a különböző élethelyzetekben előforduló problémák megoldását.

A matematika tantárgy a Nemzeti alaptantervben rögzített kulcskompetenciákat az alábbi módon fejleszti:

**A tanulás kompetenciái:** A matematika tanulása során elengedhetetlen a tananyag alapos és átfogó megértése. A szöveges feladatok megoldása fejleszti az értő olvasás és a releváns információk kiválasztásának készségét. Az általánosítás és az analógiák adekvát használata, több szempont egyidejű figyelembevétel, a rendszerezési képesség, a megszerzett tudás új helyzetekben való alkalmazása elősegítik az aktív, önirányított tanulás kompetenciáinak kialakítását, fenntartását, megerősítését. A matematika tantárgy a matematikai logika és az algoritmikus gondolkodás fejlesztésével, az ok-okozati összefüggések megláttatásával hozzájárul a többi tantárgy tanulásához szükséges rendszerező, összefüggéseket felismerő, ezáltal hatékony önálló tanulási módszerek elsajátításához és megfelelő alkalmazásához is.

**A kommunikációs kompetenciák:** A matematika fejleszti a tanuló azon képességét, hogy világosan, röviden és pontosan fejezze ki gondolatait. A matematika tanulása során fokozatosan alakul ki a tanuló érvelési és vitakészsége. A szöveges problémák megoldása javítja a szöveg megértésének készségét: a tanulónak meg kell keresnie az információkat és fel kell ismernie egy adott információ jelentőségét a probléma megoldása során. A matematika tanulási folyamatában kialakul a különböző módon (szöveg, grafikon, táblázat, diagram és képlet) bemutatott tartalmak megértésének és alkotásának készségrendszere.

**A digitális kompetenciák:** A matematika tanulása során hangsúlyos szerepet kap a problémamegoldás és az algoritmikus gondolkodás, melyek elősegítik a tanuló digitális kompetenciáinak fejlesztését. A különböző matematikai tárgyú szoftverek, alkalmazások, applikációk és játékok alkalmazásán keresztül a matematika tanulása hozzájárul a tanuló digitális kultúrájának kialakításához.

**A matematikai, gondolkodási kompetenciák:** A matematika tanulása során a tanuló gondolkodásának fejlesztése elsősorban konkrét problémák megoldásán keresztül történik. A tanuló előzetes tudása és tapasztalata alapján azonosítja a problémákat, majd ismert matematikai fogalmakra támaszkodva stratégiát dolgoz ki ezek megoldására. Elfogadja, hogy a megoldás több különböző úton is elképzelhető, illetve találkozhat olyan nyitott problémákkal is, amelyeknek több megoldása is lehetséges. Kellő kitartással próbál ki különböző matematikai módszereket, és felismeri azokat a problémákat is, amelyeknek nincs megoldása.

A tanuló mérlegelő gondolkodásának fejlesztése többek között a feladatok megoldása során kapott eredmények elemzésén és értékelésén keresztül történik. A tanuló megtanul induktív úton példákat általánosítani és deduktív érvelést használni a matematikai állítások bizonyítására.

**A személyes és társas kapcsolati kompetenciák:** A matematika tanulása fejleszti a kitartás, a pontosság, a figyelem és a fegyelmezettség képességét. A matematika tanulásán keresztül erősödik a tanuló felelősségtudata, gazdagodik az önképe, fejlődik a kooperációs készsége. A tanuló matematikai ismereteit alkalmazni tudja az egyéni célok eléréséhez szükséges tervezésben, az életét befolyásoló döntései megalapozásában és meghozatalában, a várható következmények mérlegelésében. A matematika tanulása elősegíti annak belátását, hogy a személyes erősségekre építeni, a hibákból pedig tanulni lehet.

A tanuló a matematikai foglalkozások során megtanulja, hogyan oszthatja meg ötleteit másokkal, és hogyan segítheti társait a matematikai fogalmak megértése vagy azok alkalmazása során. Felelősséget vállal a közösen kitűzött feladatok elvégzéséért, s megtanulja tisztelni mások álláspontját, gondolkodásmódját.

**A kreativitás, a kreatív alkotás, önkifejezés és kulturális tudatosság kompetenciái:** A matematika olyan tudomány, amely összeköti a különböző kultúrákat. A tanuló megismeri a gondolkodás logikai felépítésének eleganciáját, a matematikának a természethez, a művészetekhez és az épített környezethez fűződő viszonyát.

A tanuló konkrét vagy képi reprezentációval vagy szimbolikus modellekkel végzi a matematikai gondolatok vagy kapcsolatok feltárását, majd új kapcsolatokat alakít ki a matematikai fogalmak között.

**Munkavállalói, innovációs és vállalkozói kompetenciák:** A kompetencia fejlesztése valódi adatok felhasználásával összeállított mindennapi problémák megoldásán keresztül történik. Ennek során a különböző megoldási lehetőségek keresése fejleszti a gondolkodás rugalmasságát és az új ötletek megalkotásának képességét. A tanuló megfelelő játékokon keresztül képessé válik a különböző kockázatok felmérésére, a számára kedvezőnek tűnő stratégia kidolgozására, és megtapasztalja döntései következményét. A matematikai projektekben való részvétel segíti a későbbi munkavállalás szempontjából fontos készségek kialakulását (kreativitás, problémamegoldás, kezdeményező-készség, másokkal való együttműködés képessége).

## I. A speciális matematika tagozat tantervi koncepciója

Az 50 éve eredményesen működő speciális matematika tagozatok tantervének átalakítása két okból indokolt. Az egyik: a matematikatudomány és a természettudományok fejlődése során felmerülő új problémák beemelése a köznevelésbe. A másik: az új (elsősorban digitális) eszközök alkalmazásának beépítése a tanítás-tanulás folyamatába.

A speciális matematika tagozatos tanterve több cél együttes megvalósulásának szem előtt tartásával készült.

Tartalom:

Egyrészt, a matematika történeti fejlődésének, ezzel együtt nyitottságának bemutatása abból a célból, hogy a tanulók egy-egy probléma megoldása során bátran alkalmazzák a tanult eszközöket, képesek legyenek új összefüggések felismerésére, nyitottak legyenek az új, általuk ismeretlen eszközök és módszerek befogadására. Középszintű tanulmányaik befejeztével motiváltak legyenek a tanultak széleskörű alkalmazására, a megoldatlan problémák megoldásának kutatására. Másrészt cél a matematika „különálló” részterületei (pl. algebra, számelmélet, geometria, analízis) közötti belső

## Helyi tanterv négy évfolyamos speciális matematika 6 óra

összefüggések felismertetése, azok egységben kezelése, valamint a természettudományok matematikai alapjainak tudatosítása, elsajátíttatása.

A speciális matematika tagozaton – a fő célok megvalósítása érdekében – elengedhetetlen a definíciók pontos ismerete, a tételek bizonyítása, az ehhez szükséges módszerek elsajátíttatása.

### Módszerek:

A speciális matematika tagozaton tanító tanároknak éppúgy, mint a köznevelés bármely más területén dolgozóknak mindenekelőtt az életkori sajátosságok szem előtt tartása a módszertani alapelvük. A középiskolai tanulmányok hat éve alatt minden évben annyit és csak annyit szabad megtanítani, amennyit a tanuló teljes mértékben meg tud érteni, be tud építeni a gondolkodásába. A matematikatanítás célja az alkotó gondolkodásra nevelés. El kell érni, hogy a tanulók meg tudják fogalmazni kérdéseiket, a felvetődött problémákra adott válaszaikat, képesek legyenek gondolataikból és a tanult ismeretekből tiszta, pontos logikai láncot alkotva bizonyítani, cáfolni, új problémákat felvetni. A rendelkezésre álló időkeret meghatározó hányadát a gyakorlás, az alkalmazás kell, hogy kitöltse.

A speciális matematika tagozat egyik megkülönböztető erénye más matematikatanítási formákkal szemben a tanórákra tervezett, közösségben, azaz osztály/csoportkeretben történő tehetséggondozás. A tanulókat képessé kell tenni arra, hogy társaiktól tanuljanak, társaikkal együttműködve sokszorozzák meg tudásukat, a tanórák minden perce értékes, építő, gazdagító munkával teljen, valamennyi tanuló számára; a differenciált feladatkitűzés és a különféle munkaformák optimális arányainak megválasztásával.

A türelem, az együttműködés, „a szakmai vita”, ezzel a tévedés jogának biztosítása, az elmélyült önálló tevékenység és a közös munka optimális arányának megtalálása a legfontosabb módszertani elemek.

### Eszközök:

A speciális matematika tagozaton a hagyományos eszközök (tankönyvek, példatárak) továbbra is meghatározó jelentőséggel bírnak. A digitális eszközök elsősorban segédeszközök, amelyek a szemléltetést segítik és kibővítik az ismeretek alkalmazásának körét. Az eszközök használatának magas szintű ismerete szükséges. Öncélú alkalmazásuk a tanítás folyamatában a speciális matematika tagozaton kontraproduktív lehet. (Elvonhatja a figyelmet a problémafelismeréstől, félrevezetheti a tanulót a gondolkodási folyamat hosszát és lépéseit illetően.) Másrészt viszont a modern matematikatanításnak nélkülözhetetlen eszközei, amelyek nélkül az alkalmazásképes tudás és a későbbi alkotómunka elképzelhetetlen. A tanár feladata a helyes arányok megtalálása.

A 9-12. évfolyamon a matematika tantárgy Nat-ban meghatározott heti kötelező alapóraszámát átlagosan három. A speciális matematika tagozaton további heti három tanórát ajánlott a tantárgy tanítására fordítani (az alapóraszám feletti heti két órát emelt matematikaoktatás keretében lehetne biztosítani, jelen kerettanterv ezen túlmutat).

A speciális matematika tagozat lehetőséget nyújt arra, hogy pozitív motivációval hozzásegítsünk minden tanulót a matematikai gondolkodás örömeinek megismeréséhez. Tizenhárom éves kortól a tanulók mindinkább általánosító elképzelésekben, elvont konstrukciókban gondolkoznak. Elméleteket

gyártanak, összefüggéseket keresnek, próbálják értelmezni a világot. Az iskolai tanítás csak akkor lehet eredményes, ha alkalmazkodik ezekhez a változásokhoz, illetve igyekszik azokat felhasználva fejleszteni a tanulókat. A matematika kiválóan alkalmas arra, hogy a rendszerező képességet és hajlamot fejlessze. Ezen a két évfolyamon mindinkább szükséges matematikai szövegeket értelmezni és alkotni. Segítsük, hogy a tanulók a problémamegoldásaik részeként többféle forrásból legyenek képesek ismereteket szerezni.

Ebben a korban a tanításban már meg kell jelennie az elvonatkoztatás és az absztrakciós készség felhasználásának, fejlesztésének. A matematika tanításában itt jelenik meg a konkrét számok betűkkel való helyettesítése, a tapasztalatok általános megfogalmazása. Ezekben az évfolyamokban már komoly hangsúlyt kell helyeznünk arra, hogy a megsejtett összefüggések bizonyításának igénye is kialakuljon. A definíciókat és a tételeket mindinkább meg kell tudni különböztetni, azokat helyesen kimondani, problémamegoldásban mind többször alkalmazni. A mindennapi élet és a matematika (korosztálynak megfelelő) állításainak igaz vagy hamis voltát el kell tudni dönteni. A feladatok megoldása során fokozatosan kialakul az adatok, feltételek adott feladat megoldásához való szükségessége és elégségessége eldöntésének képessége. A tanítás része, hogy a feladatmegoldás előtt mind gyakrabban tervek, vázlatok készüljenek, majd ezek közül válasszuk ki a legjobbat. Esetenként járjunk be több utat a megoldás során, és ennek alapján gondoljuk végig, hogy létezik-e legjobb út, vagy ennek eldöntése csak bizonyos szempontok rögzítése esetén lehetséges. A feladatmegoldások során lehetőséget kell teremteni arra, hogy esetenként a terveket és a munka szervezését a feladatmegoldás közben a tapasztalatoknak megfelelően módosítani lehessen. Egyes feladatok esetén szükséges általánosabb eljárási módokat, algoritmusokat keresni.

A matematika egyes területei más-más módon adnak lehetőséget ebben az életkorban az egyes kompetenciák fejlesztésére. A különböző matematikatanítási módszerek minden tananyagrészen segíthetik a megfelelő önismeret, a helyes énkép kialakítását.

A tananyaghoz kapcsolódó matematikatörténeti érdekességek hozzásegítenek az egyetemes kultúra, a magyar tudománytörténet megismeréséhez. A gyakorlati élethez kapcsolódó szöveges feladatok segítik a gazdasági nevelést, a környezettudatos életvitelt, az egészséges életmód kialakítását. A definíciók megtanulása fejleszti a memóriát, a szaknyelv precíz használatára ösztönöz. A geometriai ismeretek elsajátítása közben a tanulók térszemlélete fejlődik, megtanulják az esztétikus, pontos munkavégzést. A halmazszemlélet alakítása és fejlesztése a rendszerező-képességet erősíti. Az egyes tematikus egységekre javasolt óraszámokat a táblázatok tartalmazzák.

A helyi tanterv a „Matematika kerettanterv a gimnáziumok 9–12. évfolyama számára”, illetve a Hat évfolyamos Speciális matematika tagozat kerettanterve alapján készült.

## **9–10. évfolyam**

A 9–10. évfolyamon a korábbi képzési szakaszok során megszerzett ismeretekre és kialakított készségekre, képességekre alapozva – a spirális tananyagfelépítést szem előtt tartva – az egyes témakörök új ismeretei matematikai szempontból egyre pontosabb és elvontabb formában jelennek meg a tanulási-tanítási folyamat során. Egyre határozottabb a fogalmak pontos definiálásának, az

állítások, tételek indoklásának, bizonyításának, valamint az általánosításnak az igénye. Erre a szakaszra fokozottan jellemző a korábbi és az új ismeretek egységes rendszerbe foglalása, az egyes témakörökön belüli rendszerezés.

Ebben a szakaszban is fontos cél, hogy az ismeretszerzési folyamat során a tanuló – a lehetőségekhez mérten – a tanár által irányított módon, feladatok megoldása mentén maga fedezze fel az összefüggéseket, általánosítási lehetőségeket, megoldási módokat. A kooperatív munkaformák, a csoportmunkában megoldandó projektfeladatok fejlesztik a matematikai kommunikációt. A digitális eszközök, dinamikus szoftverek, online felületek támogatják a szemléltetést, a megértést és a felfedeztetést.

A 9–10. évfolyamon megjelenő témakörök tartalmának egy része folytatása, kiterjesztése és kiegészítése a korábbi szakaszokban is megjelenő tananyagtartalmaknak. Ebben a szakaszban jelennek meg először a valós számok; elsőfokú egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek; másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek; a függvény fogalma, függvénytulajdonságok; a kör és részei. A számelmélet is viszonylag nagy hangsúlyt kap. Főleg a fizika feladatok megoldása miatt a szögfüggvények is szerepelnek hegyesszögekre, majd definiáljuk a kiterjesztésüket is. A vektorok mint eszközök is fontosabb szerepet kapnak, ezért külön fejezetben szerepelnek. Vannak olyan témakörök, amelyek megjelennek más területek tanítása során is, ezért a tananyag egyes részeihez javasolt óraszámok nem feltétlenül jelentenek időben összefüggő egységet. Az algebrai eszközök és a függvényekkel kapcsolatos ismeretek bővülése lehetővé teszi a hétköznapi vagy matematikai nyelven megfogalmazott problémák és a megoldás során alkalmazott matematikai modellek körének bővülését.

**A 9–10. évfolyamon a speciális matematika tantárgy alapóraszámát évfolyamonként heti 6 óra, azaz évente 204 óra. Az új ismeretek a teljes óraszám négyötöd része alatt a legtöbb tanuló számára elsajátíthatók, így a fennmaradó órák felhasználhatók ismétlésre, gyakorlásra, felzárkóztatásra, tehetséggondozásra és számonkérésre. Az esetleges kiegészítő anyagot a „Javasolt tevékenységek, kapcsolódási pontok, matematikatörténet” részben jeleztük.**

**A témakörök áttekintő táblázata:**

Témakör neve	9. évf.	10. évf.
Halmazok	13	2
Matematikai logika	11	5
Kombinatorika, gráfok	0	28
Számhalmazok, műveletek	6	0
Hatvány, gyök	10	10
Betűs kifejezések alkalmazása egyenletmegoldás, függvényábrázolás során	30	0
Arányosság, százalékszámítás	6	0
Számelmélet	15	15
Elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek	20	10
Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, szélsőérték-feladatok	0	25
A függvény fogalma, függvénytulajdonságok	19	7
Geometriai alapismeretek	7	0
Háromszögek	28	10
Négyszögek, sokszögek	4	4
A kör és részei	9	18
Transzformációk, szerkesztések	14	12
Vektorok	4	11

Trigonometria	0	21
Leíró statisztika	0	10
Valószínűség-számítás	0	8
Év végi összefoglalás	8	8
<b>Összes óraszám:</b>	204	204

### TÉMAKÖR: **Halmazok**

**JAVASOLT ÓRASZÁM:  $13 + 2 = 15$  óra**

#### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- látja a halmazműveletek és a logikai műveletek közötti kapcsolatokat;
- véges halmazok elemszámát meghatározza;
- alkalmazza a logikai szita elvét.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló**

**a 9. évf. végére:**

- adott halmazt diszjunkt részhalmazaira bont, osztályoz;
- halmazokat különböző módokon megad;
- halmazokkal (számhalmazokkal és ponthalmazokkal is) műveleteket végez, azokat ábrázolja és értelmezi;
- ismeri és alkalmazza a de Morgan azonosságokat
- meghatározza egy halmaz részhalmazainak számát;
- feladatokat old meg logikai szita segítségével.

**a 10. évf. végére:**

- szemléletes képet fogalmaz meg végtelen halmazokról.

#### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Halmaz közös elem nélküli részhalmazokra bontása, példák ennek alkalmazására a matematikán belül, más tantárgyaknál és a mindennapi életben
- Halmaz megadása utasítással, elemek felsorolásával
- Halmazok közötti viszonyok ábrázolása, értelmezése
- Halmazok metszetének, uniójának, különbségének, komplementerének képzése, ábrázolása és értelmezése
- két-három-négy halmaz elemszámával kapcsolatos feladatokat old meg logikai szita segítségével
- Szemléletes kép végtelen halmazokról (A „végtelen szálloda” mint modell)
- Pontos definíciók, jelölések használata
- Szimmetrikus differencia
- Descartes-szorzat
- $n$  elemű halmaz részhalmazainak a száma (bizonyítással)
- Logikai szita formula 4 és több halmazra

#### FOGALMAK

alaphalmaz, részhalmaz, üres halmaz, halmazok egyenlősége, Venn-diagram; halmazműveletek: unió, metszet, különbség, komplementer halmaz; diszjunkt halmazok, halmaz elemszáma, logikai szita; szimmetrikus differencia, Descartes-szorzat

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET

- Hétköznapi életből, más tantárgyakból vagy a matematikából vett, konkrétan vagy digitálisan megjelenített alaphalmazból megadott tulajdonságokkal rendelkező elemek válogatása
- Konkrét részalmaz esetén a részalmaz képzési szempontjainak megállapítása
- A történelem, a művészetek, a tudományok, a sport neves személyiségeinek kitalálása különböző tulajdonságok alapján
- Barkochba játék
- Megszámlálhatóan végtelen számosságú halmazok elemei között egyértelmű hozzárendelés felfedeztetése, például a pozitív természetes számok halmazának számossága megegyezik a pozitív páros számok halmazának számosságával
- Annak tudatosítása, hogy alphalmaz nélkül nincs komplementer halmaz
- Halmaz közös elem nélküli halmazokra bontása (osztályozás) jelentőségének beláttatása
- *Magyar nyelv és irodalom*: mondatok, szavak, hangok rendszerezése
- *Biológia-egészségtan*: halmazműveletek alkalmazása a rendszertanban
- *Kémia*: anyagok csoportosítása
- *Biológia-egészségtan*: élőlények osztályozása; besorolás közös rész nélküli halmazokba
- Matematikatörténet: Georg Cantor

### TÉMAKÖR: Matematikai logika

#### JAVASOLT ÓRASZÁM: 11 + 5 óra

#### TANULÁSI EREDMÉNYEK

##### A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- látja a halmazműveletek és a logikai műveletek közötti kapcsolatokat;
- megállapítja egyszerű „ha ... , akkor ...” és „akkor és csak akkor” típusú állítások logikai értékét;
- tud egyszerű állításokat indokolni és tételeket bizonyítani.

##### A témakör tanulása eredményeként a tanuló

###### a 9. évf. végére:

- adott állításról eldönti, hogy igaz vagy hamis;
- alkalmazza a tagadás műveletét egyszerű feladatokban;
- ismeri és alkalmazza az „és”, a (megengedő és kizáró) „vagy” logikai jelentését;
- megfogalmazza adott állítás megfordítását;
- helyesen használja a „minden” és „van olyan” kifejezéseket.

###### a 10. évf. végére:

- bizonyítási módszereket (direkt, indirekt, teljes indukció) ismeri, a logikai szitát és a skatulyaelvet alkalmazza feladatmegoldás során;
- használja a szükséges, az elégséges, és a szükséges és elégséges feltétel fogalmát;
- ismeri a logikai műveletek tulajdonságait, és azokat összeveti a halmazműveletek tulajdonságaival;
- ismeri és alkalmazza az implikáció és az ekvivalencia műveletét.

#### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A matematikai bizonyítás fogalma
- Állítás logikai értékének megállapítása (igaz vagy hamis)



- Állítás tagadásának alkalmazása egyszerű feladatokban
- A „nem”, az „és”, a megengedő „vagy” és a kizáró „vagy” logikai jelentésének ismerete és alkalmazása matematikai és matematikán kívüli feladatokban
- A „minden” és a „van olyan” típusú állítások logikai értékének megállapítása és ennek indoklása egyszerű esetekben
- Adott állítás megfordításának megfogalmazása
- „Ha..., akkor...” és „akkor és csak akkor” típusú egyszerű állítások logikai értékének megállapítása
- Stratégiai és logikai játékok
- A logikai műveletek tulajdonságai
- Összevetés a halmazműveletek tulajdonságaival
- Következtetések

### **FOGALMAK**

tétel, bizonyítás, igaz-hamis; negáció, konjunkció, diszjunkció (kizáró is), implikáció és ekvivalencia művelet

### **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET**

- „Bírósági tárgyalás”, ahol az osztály tanulói a védők és a vádlók egy állítás indoklására, cáfolására
- „Mit állít a szigetlakó?”, „Ki volt a tettes, ha...?” típusú feladatok eljátszása, megoldása csoportmunkában
- Logikai készséget fejlesztő játékok, például „Einstein-fejtörő”
- Stratégiai játékok, például egyszerű NIM játékok, táblás játékok
- Tudatos pénzügyi tervezést segítő játékok
- Matematikai és más jellegű érvelésekben a logikai műveletek felfedezése
- Matematikai tartalmú (nem tudományos jellegű) szöveg értelmezése
- Kísérletezés, módszeres próbálkozás, sejtés, cáfolás megkülönböztetése
- Példák a hétköznapi helyes és helytelenül megfogalmazott következtetésekre
- *Matematikatörténet*: Pólya György, George Boole
- Konstrukciók. Lehetetlenségi bizonyítások
- Adott tulajdonságú halmazok konstruálása
- Ábrák színezése, lefedése adott feltételek szerint
- Annak indoklása, hogy valamely konstrukció nem hozható létre (invariáns mennyiség keresése) Állapotfüggvényes feladatok
- A logikai áramkörök elméletének elemei

### **TÉMAKÖR: Kombinatorika, gráfok**

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 0 + 28 óra**

### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

#### **A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló**

- matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
- a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;

- a kiválasztott modellben megoldja a problémát;
- megold sorba rendezési és kiválasztási feladatokat;
- konkrét szituációkat szemléltet és egyszerű feladatokat megold gráfok segítségével;
- véges halmazok elemszámát meghatározza;
- alkalmazza a logikai szita elvét.

### **A témakör tanulása eredményeként a tanuló**

#### **a 10. évf. végére:**

- alkalmazza feladatok megoldásában az ismétlés nélküli és az ismétléses permutációt, variációt, kombinációt;
- ismeri, bizonyítja és alkalmazza a permutációk (ismétlés nélkül és ismétléssel), variációk (ismétlés nélkül és ismétléssel), kombinációk (ismétlés nélkül) kiszámítására vonatkozó képleteket;
- ismeri a binomiális együtthatók alapvető tulajdonságait;
- tudja bizonyítani és alkalmazni a binomiális tételt;
- ismeri és alkalmazza a Pascal-háromszöget és alapvető tulajdonságait;
- használja, hogy a foksámok összege az élek számának kétszerese;
- ismeri a fa pontjai és élei száma közötti összefüggést;
- definiálja és alkalmazza a következő fogalmakat: többszörös él, hurokél, séta, körséta, út, kör, összefüggő gráf, egyszerű gráf, teljes gráf, fa, komplementer gráf, izomorf gráfok;
- ismeri az  $n$  pontú teljes gráf éleinek a számát;
- bizonyítja, hogy bármely (legalább kétpontú) egyszerű gráfban létezik két azonos foksámú pont;
- használja, hogy a fagráf minimális összefüggő, illetve maximális körmentes gráf.

#### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Hétköznapi helyzetekhez kapcsolódó sorba rendezési és kiválasztási feladatok megoldása rendszerezéssel
- Sorba rendezési és kiválasztási feladatok megoldása matematikai problémákban
- Esetszétválasztás és szorzási elv alkalmazása feladatok megoldásában
- Összeszámlálási modellek alkalmazása feladatok megoldásában
- Permutáció – ismétlés nélkül és ismétléssel (bizonyítással)
- Variáció – ismétlés nélkül és ismétléssel (bizonyítással)
- Kombináció – ismétlés nélkül (bizonyítással) és ismétléssel (bizonyítás nélkül)
- Jelek használata:  $n!$ ,  $\binom{n}{k}$
- Binomiális együtthatók, egyszerű tulajdonságaik
- Pascal-háromszög és tulajdonságai
- Binomiális tétel
- Gráfok alkalmazása konkrét hétköznapi és matematikai szituációk szemléltetésére, feladatok megoldására
- A foksámok összege és az élek száma közötti összefüggés
- Összefüggőség, komponensek, komplementer gráf (a gráf vagy komplementere összefüggő)
- Fagráf (minimális összefüggő, maximális körmentes)

#### **FOGALMAK**

Permutáció, variáció, kombináció (ismétlés nélkül és ismétléssel), gráf, gráf csúcsa, gráf éle, többszörös él, hurokél, egyszerű gráf, izomorf gráfok. Vonalak, körök, utak (séta, vonal, út, kör, Euler-vonal, Euler-körvonal). Összefüggő gráf, komponensek.

#### **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET**

- Sorba rendezési és kiválasztási feladatok megoldása rendszerezett leszámolással és a szorzási és/vagy esetszétválasztási elv alkalmazásával
- Geometriai eszközök használata kombinatorikai problémák megoldására
- Néhány feltételt tartalmazó tanulói órarend készítése kis elemszámmal
- Azonos modellen alapuló, de különböző megfogalmazású feladatok megoldása
- Szorzat vagy összeg alakban megadott eredményű kombinatorika feladatokhoz saját szöveg írása
- Téves megoldású kombinatorikafeladatokban a hiba megtalálása és a tévedés kijavítása
- Sorba rendezési feladatok megoldásának szemléltetése gráffal
- Adott gráfhoz hozzáillő feladatszöveg alkotása és „feladatküldés” csoportmunkában
- *Magyar nyelv és irodalom*: periodicitás, ismétlődés és kombinatorika mint szervezőelv poetizált szövegekben
- *Kémia*: molekulák térszerkezete
- *Történelem, társadalmi és állampolgári ismeretek*: pl. családfa
- *Technika, életvitel és gyakorlat*: közlekedés
- Matematikatörténet: Blaise Pascal, Erdős Pál
- Néhány kombinatorikus geometriai feladat
  - $n$  pont maximum hány egyenest határoz meg?
  - $n$  egyenesnek maximum hány metszéspontja lehet?
  - $n$  egyenes maximum hány részre osztja a síkot?
- Permutációk ábrázolása gráffal; osztók fája; részhalmazok ábrázolása bináris fákkal; leszámolási feladatok megoldása fákkal
- Páros gráf
- Hamilton-kör, Hamilton-út
- Ismerkedés síkba rajzolható gráfokkal
- Egyszerű Ramsey-típusú feladatok konkrét, kis számokra

#### **TÉMAKÖR: Számhalmazok, műveletek**

#### **JAVASOLT ÓRASZÁM: 6 + 0 óra**

#### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

#### **A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri a számhalmazok épülésének matematikai vonatkozásait a természetes számoktól a valós számokig;
- ismer példákat irracionális számokra.

#### **A témakör tanulása eredményeként a tanuló**

#### **a 9. évf. végére:**

- a kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás műveleti azonosságokat helyesen alkalmazza különböző számolási helyzetekben;

## Helyi tanterv négy évfolyamos speciális matematika 6 óra

- racionális számokat tizedes tört és közöséges tört alakban is felír;
- ismeri a valós számok és a számegyenes kapcsolatát;
- ismeri és alkalmazza az abszolút érték, az ellentett és a reciprok fogalmát;
- a számolással kapott eredményeket nagyságrendileg megbecsüli, és így ellenőrzi az eredményt;
- valós számok közelítő alakjaival számol, és megfelelően kerekít.

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}$
- Műveleti azonosságok (kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás), zárójelek helyes használata
- Mely műveletek vezetnek ki az egyes számhalmazokból?
- Tizedes törtek átírása közöséges tört alakba és viszont
- Irracionális számok szemléltetése
- A racionális számok halmaza nem elegendő a számegyenes pontjainak jelölésére
- Irracionális szám kétoldali közelítése racionális számokkal
- Nyílt és zárt intervallumok fogalmának ismerete és alkalmazása
- Számok abszolút értékének, ellentettjének és reciprokának meghatározása
- Számológéppel elvégzett számítások eredményének előzetes becslése és nagyságrendi ellenőrzése
- Valós számok adott jegyre kerekítése
- Valós számok gyakorlati helyzetekben történő észszerű kerekítése

### FOGALMAK

racionális szám, irracionális szám, valós szám, nyílt intervallum, zárt intervallum, abszolút érték, ellentett, reciprok

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET

- A számológép helyes használatának elsajátítása, például műveleti sorrend, zárójelek
- Írásban elvégzett műveletek ellenőrzése számológéppel
- Célszám megközelítése adott számjegyekkel, műveleti jelek és zárójelek használatával
- Tanulói kiselőadás a helyi értékes számírás kialakulásáról, a számjegyek kialakulásának történetéről
- A tanteremben vagy a tanterem környezetében végzett mérések esetén a megfelelő kerekítés alkalmazása
- Adott mérés elvégzése esetén a mérési hiba következményeinek vizsgálata
- Annak tudatosítása, hogy az intervallum végtelen halmaz
- Az abszolút érték új definíciója egyenértékű a távolsággal adott definícióval

## TÉMAKÖR: **Hatvány, gyök**

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 10 + 10 óra**

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri és alkalmazza a racionális kitevőjű hatvány fogalmát és a hatványozás azonosságait.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló**

**a 9. évf. végére:**

- ismeri és alkalmazza az egész kitevőjű hatvány fogalmát és a hatványozás azonosságait;
- ismeri és alkalmazza a normálalak fogalmát;
- ismeri és alkalmazza a négyzetgyök fogalmát és azonosságait;
- a négyzetgyök azonosságait használja a gyökjel alól kivitelre, a gyökjel alá bevitelre, a nevező gyöktelenítésére.

**a 10. évf. végére:**

- ismeri és alkalmazza az  $n$ -edik gyök fogalmát;
- ismeri és alkalmazza az  $n$ -edik gyök azonosságait;
- tud  $\sqrt{cx + b} = cx + d$  típusú egyenleteket megoldani;
- tudjon legfeljebb két négyzetre emeléssel megoldható egyenleteket megoldani.

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Valós számok hatványozása pozitív egész kitevőre
- Hatványozás 0 és negatív egész kitevőre
- A hatványozás azonosságainak megfigyelése, felfedezése
- A hatványozás azonosságainak bizonyítása egész kitevő esetén
- Számok normálalakja
- Számolás normálalak segítségével számológéppel is
- A négyzetgyök definíciója
- Nemnegatív számok négyzetgyökének megadása számológép segítségével
- A négyzetgyökvonás azonosságai (kivétel a gyökjel alól, bevitel a gyökjel alá, nevező gyöktelenítése)
- Bizonyítja négyzetgyökvonás azonosságait
- $\sqrt{n}$  irracionális, ha  $n$  nem négyzetszám
- $n$ -edik gyök és azonosságai
  - Páros és páratlan gyökkitevő
  - Bevitel a gyökjel alá. Kivétel a gyökjel alól
  - az  $n$ -edik gyök függvény ábrázolása páros és páratlan kitevőre

### FOGALMAK

hatványalap, hatványkitevő, normálalak, négyzetgyök,  $n$ -edik gyök

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET

- Projektmunka: hányszor lehet félbehajtani egy nagyméretű papírt? Keresés az interneten, kísérlet végzése például egy teljes guriga vécépapírral

- Internetes forrásból származó, nagyon kicsi vagy nagyon nagy számokat tartalmazó cikkek valóságtartalmának megállapítása páros vagy csoportmunkában

**TÉMAKÖR: Betűs kifejezések alkalmazása egyenletmegoldás, függvényábrázolás során**

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 30 + 0 óra**

**TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló**

**a 9. évf. végére:**

- műveleteket végez algebrai kifejezésekkel;
- ismeri és alkalmazza a „Fejlesztési feladatok és ismeretek” részben felsorolt algebrai azonosságokat;
- átalakít algebrai kifejezéseket összevonás, szorzattá alakítás, nevezetes azonosságok alkalmazásával;
- másodfokú polinomot átalakít teljes négyzetté kiegészítéssel;
- ismeri a polinom fokszámát, fokszám szerint rendezett alakját;
- polinomot maradékosan oszt.

**FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Műveletek egyszerű algebrai kifejezésekkel: összeadás, kivonás, szorzás, osztás, egytagú kifejezések hatványa
- Műveleti azonosságok ismerete és alkalmazása egyenletek megoldása során
- Az  $(a \pm b)^2$ ,  $(a + b)(a - b)$ ,  $(a + b + c)^2$ ,  $a^3 \pm b^3$ ,  $a^n - b^n$ ,  $a^{2k+1} + b^{2k+1}$  kifejezésekre vonatkozó nevezetes azonosságok ismerete és alkalmazása (például oszthatósági feladatokban, egyenletek megoldásában, függvények ábrázolásában)
- Egyszerű másodfokú polinom átalakítása teljes négyzetté kiegészítéssel
- Tudjon első és másodfokú egyenlőtlenség-rendszereket megoldani.
- Tudjon egyszerű négyzetgyökös egyenlőtlenséget megoldani
- Algebrai kifejezések átalakítása összevonás, szorzattá alakítás, nevezetes azonosságok alkalmazásával
- Az algebrai tört fogalmának ismerete, műveletek algebrai törtekkel
- Polinomok maradékos osztása
- Kifejezések legnagyobb közös osztója, legkisebb közös többszöröse

**FOGALMAK**

összeg, tag, szorzat, tényező, egynemű kifejezés, együttható, teljes négyzet, polinom algebrai tört

**JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET**

- „Gondolj egy számra, és én kitalálom” játék, matematikai bűvésztrükkök algebrai magyarázata
- Algebrai kifejezésekkel végzett műveletek geometriai modellezése
- A nevezetes azonosságok geometriai megjelenítése

Helyi tanterv négy évfolyamos speciális matematika 6 óra

- Számolási „trükkök” a nevezetes azonosságok segítségével, például kétjegyű számok négyzetének,  $99 \cdot 101$  típusú szorzat eredményének kiszámolása fejben, vagy annak gyors eldöntése, hogy prímszám-e a 3599?
- *Fizika; kémia*: mennyiségek kiszámítása képlet alapján, képletek átrendezése
- *Matematikatörténet*: algebra – Al-Hvarizmi

### TÉMAKÖR: **Arányosság, százalékszámítás**

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 6 + 0 óra**

#### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri a hosszúság, terület, térfogat, űrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
- ismeri és alkalmazza a százalékalap, -érték, -láb, -pont fogalmát.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló**

**a 9. évf. végére:**

- ismeri és alkalmazza az egyenes és a fordított arányosságot;
- megold százalékszámítással kapcsolatos alapvető feladatokat.

#### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Az egyenes és a fordított arányosság fogalmának ismerete és alkalmazása gyakorlati problémák megoldása során
- Az egyenes és a fordított arányosság grafikonjának felismerése és elkészítése
- Példák az egyenes és a fordított arányosságtól különböző arányosságokra (négyzetes, gyökös)
- Példák egy irányban vagy ellentétes irányban változó mennyiségpárookra a mindennapi életből
- Százalékszámítással kapcsolatos hétköznapi helyzetekhez (például háztartási bevételekhez, kiadásokhoz, pénzügyi fogalmakhoz, gazdasági folyamatokhoz) és más tantárgyakhoz köthető feladatok megoldása

#### FOGALMAK

egyenes arányosság, fordított arányosság, százalékalap, százaléérték, százalékláb

#### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET

- Összetett, valódi élethelyzetekkel kapcsolatos feladatok megoldása csoportmunkában, szükség esetén grafikon segítségével
- Háztartási számlák elemzése az azokon megjelenő egységárak és fizetendő összegek figyelembevételével

### TÉMAKÖR: **Számelméleti ismeretek, számhalmazok épülése**

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 15 + 15 óra**

#### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

**a 9. évf. végére:**

- ismeri és alkalmazza az oszthatóság alapvető fogalmait;
- összetett számokat felbont prímszámok szorzatára;
- meghatározza két természetes szám legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét, és alkalmazza ezeket egyszerű gyakorlati feladatokban;
- ismeri és alkalmazza az oszthatósági szabályokat (a 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 számokra);
- érti a helyi értékes írásmódot 10-es és más ( $n \leq 9$ ) alapú számrendszerekben;
- tud  $n$  alapú ( $n \leq 9$ ) számrendszerben felírt számokat összeadni és kivonni;
- ismeri a számhalmazok épülésének matematikai vonatkozásait a természetes számoktól a valós számokig;
- ismer példákat irracionális számokra.

**a 10. évf. végére:**

- nehezebb oszthatósági feladatot több módszerrel is megold;
- egyszerűbb diofantoszi egyenletet tud megoldani;
- lineáris törtet vizsgál, hogy mikor egész;
- ismeri és használja a pitagoraszi számhármak képletét.

**FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös meghatározása a prímtényező felbontásból, az euklideszi algoritmus
- Összetett oszthatósági szabályok alkalmazása
- Számolás osztási maradékokkal (például összeg, szorzat, hatvány maradéka)
- Négyzetszámok osztási maradékai
- „Miért nem négyzetszám?”
- A de Morgan azonosságok alkalmazása számelméleti feladatokban
- Számok felírása 10-estől különböző alapú számrendszerben
- Az egész számok, a véges tizedes törtek, a végtelen szakaszos tizedes törtek és a racionális számok kapcsolata
- A számhalmazok épülésének matematikai vonatkozásai a természetes számoktól a valós számokig
- Végtelen nem szakaszos tizedes törtek ismerete
- Példák irracionális számokra
- Tudja, hogy mit értünk adott műveletekre zárt számhalmazokon
- Adott  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) esetén tudja eldönteni, hogy  $\sqrt{n}$  irracionális szám-e
- A  $\sqrt{2}$  irracionalitásának bizonyítása
- Tudja megfogalmazni a számelmélet alaptételét
- Bizonyítsa, hogy végtelen sok prímszám van
- Tudjon összetett oszthatósági feladatokat megoldani
- Tudja meghatározni természetes számok pozitív osztóinak számát
- Tudjon  $n$  alapú ( $n \leq 9$ ) számrendszerben felírt számokat összeadni és kivonni
- Tökéletes számok
- Néhány további tétel és sejtés a prímszámok elhelyezkedéséről
- Diofantoszi egyenletek
- kis-Fermat-tétel és alkalmazásai



Helyi tanterv négy évfolyamos speciális matematika 6 óra

- Pitagoraszi számhármak
- Egész együtthatós polinom egész és racionális gyökei

#### **FOGALMAK**

természetes szám, egész szám, racionális szám, irracionális szám, valós szám, relatív prímek

#### **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET**

- Oszthatósággal kapcsolatos „bűvésztükkök” bemutatása
- Számrendszerek segítségével megoldható rejtvények
- Tanulói kiselőadás a 10-estől különböző alapú számrendszerek használatáról a múltban és ennek mai napig tartó hatásairól
- Tanulói kiselőadás számelméleti érdekességekről, például tökéletes számok és barátságos számpárok, prímszámok, jelenleg ismert legnagyobb prím, titkosítás
- Halmazábra elkészítése a számhalmazokról
- $\sqrt{n}$  hosszú szakasz szerkesztési eljárásának bemutatása
- *Matematikatörténet*: Neumann János.
- *Fizika; kémia; biológia-egészségtan*: tér, idő, nagyságrendek – méretek és nagyságrendek becslése és számítása az atomok méreteitől az ismert világ méretéig; szennyezés, környezetvédelem.
- *Informatika*: nagy prímek szerepe a titkosításban
- *Matematikatörténet*: Diophantos, Eukleidész, Eratoszthenész, Euler, Fermat
- A maradékos osztás tétele, Euklideszi algoritmus
- Osztók számának, összegének és szorzatának meghatározása prímtényező felbontásból
- Euler-féle  $\varphi$  függvény, a  $d(n)$  függvény
- Euler-Fermat-tétel
- Kongruenciák és tulajdonságai
- Maradékosztályok
- Wilson-tétel
- Néhány speciális prím (Mersenne-prímek, Fermat-prímek)

TÉMAKÖR: Elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 20 + 10 óra**

#### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
- adott problémához megoldási stratégiát, algoritmust választ, készít;
- a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
- a kiválasztott modellben megoldja a problémát;
- a modellben kapott megoldását az eredeti problémába visszahelyettesítve értelmezi, ellenőrzi, és az észszerűségi szempontokat figyelembe véve adja meg válaszát;
- felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot;
- egyenletek megoldását behelyettesítéssel, értékészlet-vizsgálattal ellenőrzi.

## **A témakör tanulása eredményeként a tanuló**

### **a 9. évf. végére:**

- ismeri és alkalmazza a következő egyenletmegoldási módszereket: mérlegelv, grafikus megoldás, szorzattá alakítás;
- megold elsőfokú egyismeretlenes egyenleteket és egyenlőtlenségeket.

### **a 10. évf. végére:**

- megold algebrai úton abszolútértéket tartalmazó egyenleteket;
- abszolút értéket tartalmazó egyenlőtlenségeket algebrai és grafikus úton is tud megoldani;
- a grafikus megoldással tetszőleges pontossággal tud megoldást keresni;
- egyenlőtlenséggel jellemzett ponthalmazt ábrázol;
- megold elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszereket.

## **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Elsőfokú egyenletre, egyenlőtlenségre, egyenletrendszerre vezető matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információk kigyűjtése, rendszerezése
- Adott problémához megoldási stratégia, algoritmus választása, készítése
- A problémának megfelelő matematikai modell választása, alkotása
- A kiválasztott modellben a probléma megoldása
- A modellben kapott megoldás értelmezése az eredeti problémába visszahelyettesítve, ellenőrzés és válaszadás az észszerűségi szempontokat figyelembe véve
- Alaphalmaz, megoldáshalmaz fogalmának ismerete
- Egyismeretlenes elsőfokú egyenlet és egyenlőtlenség megoldása mérlegelvel és grafikusan
- Elsőfokú egyenlettel, egyenlőtlenséggel, egyenletrendszerrel megoldható szöveges feladatok megoldása (például út-idő-sebesség, közös munkavégzés, keverékes feladatok, pénzügyi és gazdasági tematikájú feladatok)
- Egyszerű abszolútértékes egyenlet megoldása algebrai és grafikus úton
- Egyenletek ekvivalenciája
- Törtös egyenletek, egyenlőtlenségek (tört értéke mikor nulla, pozitív, negatív?)
- Több abszolút értéket tartalmazó egyenletek
- Abszolút értéket tartalmazó egyenletek, egyenlőtlenségek (algebrai és grafikus megoldás)
- Elsőfokú paraméteres egyenletek és egyenlőtlenségek
- Elsőfokú egyenletrendszerek megoldása
  - behelyettesítő módszer
  - grafikusan
  - egyenlő együtthatók módszere
  - új ismeretlen bevezetése
- Elsőfokú paraméteres egyenletrendszerek
- Egyenletrendszerrel megoldható szöveges feladatok
- Értelmezési tartomány, illetve értékészlet-vizsgálattal, valamint szorzattá alakítással megoldható összetett feladatok megoldása
- Paraméteres elsőfokú egyenletek megoldása
- Elsőfokú, háromismeretlenes egyenletrendszerek megoldása

## FOGALMAK

alaphalmaz, megoldáshalmaz, mérlegelv

## JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET

- Szöveges feladatok megoldása több különböző úton, a különböző megoldások összehasonlítása előnyök és hátrányok szempontjából
- Hiányos, túlhatározott, illetve ellentmondó adatokat tartalmazó problémák vizsgálata
- Nyílt végű problémák megoldása
- Adott egyenlethez szöveges feladat alkotása és „feladatküldés” csoportmunkában
- Digitális eszköz használata egyenletek, egyenlőtlenségek és egyenletrendszerek grafikus megoldása során; a digitális eszközzel történő ábrázolás előnyeinek és hátrányainak megbeszélése
- Különböző módszerek alkalmazása ugyanarra a problémára egyenletrendszereknél (behelyettesítő módszer, ellentett együtthatók módszere)
- *Fizika*: kinematika, dinamika
- *Fizika*: a mérés hibája
- *Kémia*: oldatok összetétele

**Témakör:** Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, szélsőérték-feladatok

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 0 + 25 óra**

## TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
- adott problémához megoldási stratégiát, algoritmust választ, készít;
- a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
- a kiválasztott modellben megoldja a problémát;
- a modellben kapott megoldását az eredeti problémába visszahelyettesítve értelmezi, ellenőrzi, és az észszerűségi szempontokat figyelembe véve adja meg válaszát;
- felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot;
- egyenletek megoldását behelyettesítéssel, értékészlet-vizsgálattal ellenőrzi.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló**

**a 10. évf. végére:**

- megold másodfokú egyismeretlenes egyenleteket és egyenlőtlenségeket; ismeri és alkalmazza a diszkriminánst, a megoldóképletet és a gyöktényezős alakot;
- megold másodfokúra visszavezethető egyenleteket;
- szélsőérték-problémákat old meg másodfokú függvények, illetve közepek alkalmazásával.

## FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Másodfokú egyenletre, egyenlőtlenségre vezető matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információk kigyűjtése, rendszerezése
- Adott problémához megoldási stratégia, algoritmus választása, készítése

- A problémának megfelelő matematikai modell választása, alkotása
- A kiválasztott modellben a probléma megoldása
- A modellben kapott megoldás értelmezése az eredeti problémába visszahelyettesítve, ellenőrzés és válaszadás az észszerűségi szempontokat figyelembe véve
- Egyenletek megoldása ekvivalens átalakításokkal
- Másodfokú egyenlet megoldása szorzattá alakítással, teljes négyzetté kiegészítéssel, megoldóképlettel (számológép használata) és grafikusán
- Másodfokú egyenlőtlenség megoldása grafikusán
- Másodfokú egyenlettel megoldható szöveges feladatok megoldása
- Négyzetgyökös egyenletek megoldása
- A másodfokú egyenlet diszkriminánsának előjele és az egyenlet megoldásainak száma közötti összefüggés ismerete
- Egyszerű másodfokú egyenletrendszerek megoldása
- Egyszerű törtes egyenletek megoldása
- Két pozitív szám számított középértékeinek (számtani, mértani, négyzetes, harmonikus), valamint, az  $H \leq M \leq Sz \leq N$  egyenlőtlenségek ismerete
- $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$  bizonyítása
- Feladatok megoldása számtani és mértani közép közötti összefüggés alapján
- Másodfokú szélsőérték-feladatok megoldása
- A másodfokú egyenlet megoldóképletének bizonyítása
- A gyökök és együtthatók közötti összefüggések alkalmazása, bizonyítása
- Másodfokú paraméteres egyenletek megoldása
- Törtes egyenletek megoldása
- Egyszerű másodfokú egyenletrendszerek megoldása
- Másodfokúra visszavezethető egyenletek (új ismeretlen bevezetése), egyenletrendszerek megoldása
- Legfeljebb két négyzetre emeléssel megoldható egyenletek megoldása
- Racionális gyökök keresése Viète-formulák segítségével
- Számtani, mértani, négyzetes és harmonikus közép, hatványközép, és a köztük lévő egyenlőtlenség. (Algebrai bizonyítás két- és több tagra.)
- Szélsőérték-feladatok közepek segítségével
- Másodfokú egyenlőtlenségek
- Másodfokú egyenletrendszer
- Gyökös egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek
  - Ekvivalens és nem ekvivalens egyenletmegoldási lépések
  - Hamis gyök, gyökvesztés
- Paraméteres másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenletek, egyenlőtlenségek
  - Szimmetrikus együtthatójú egyenletek

## FOGALMAK

másodfokú egyenlet megoldóképlete, diszkrimináns, gyöktényező alak, ekvivalens átalakítás  
számtani közép, mértani közép, harmonikus közép, négyzetes közép, hatványközép

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET

- Másodfokú egyenlet megoldása konkrét együtthatókkal és paraméterekkel, a lépéseket párhuzamosan végezve
- Digitális eszköz használata egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása során
- Tanulói kiselőadás tartása magasabb fokú egyenletek megoldásának történetéről, érdekességeiről
- Hétköznapi életből vett és matematikai szélsőérték-problémák megoldása több módszerrel (függvényábrázolással, algebrai átalakítással, számtani-mértani közép segítségével)
- *Fizika*: fonálinga lengésideje, rezgésidő számítása, egyenletesen gyorsuló mozgás kinematikája
- *Matematikatörténet*: részletek a harmad- és ötödfokú egyenlet megoldásának történetéből.
- Másodfokú egyenlőtlenség megoldása grafikusan számítógépes program segítségével
- Gyökös egyenleteknél hamis gyökök
- *Matematikatörténet*: magasabb fokú egyenletek megoldhatósága. Cardano, Galois, Abel.
- Magasabb fokú egyenletek
  - Bezout tétele
  - Gyökök és együtthatók közti összefüggés
  - Horner-elrendezés

### TÉMAKÖR: A FÜGGVÉNY FOGALMA, FÜGGVÉNYTULAJDONSÁGOK

#### JAVASOLT ÓRASZÁM: 19 + 7 óra

#### TANULÁSI EREDMÉNYEK

##### A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- képlettel adott függvényt hagyományosan és digitális eszközzel ábrázol;
- adott értékészletbeli elemhez megtalálja az értelmezési tartomány azon elemeit, amelyekhez a függvény az adott értéket rendeli.

##### A témakör tanulása eredményeként a tanuló

###### a 9. évf. végére:

- megad hétköznapi életben előforduló hozzárendeléseket;
- adott képlet alapján helyettesítési értékeket számol, és azokat táblázatba rendezi;
- táblázattal megadott függvény összetartozó értékeit ábrázolja koordináta-rendszerben;
- felrajzolja a lineáris, az abszolútérték, a lineáris törtfüggvény és a másodfokú függvény grafikonját;
- Tetszőleges függvényt transzformál;
- ezen függvények a grafikonjairól megállapítja függvények alapvető tulajdonságait (ÉT, ÉK, zérushely, szélsőértékek, monotonitás, korlátosság, periodicitás, paritás).

###### a 10. évf. végére:

- felrajzolja az előjel-, egészrész-, törtrészfüggvény grafikonját;
- felrajzolja, jellemzi, transzformálja a négyzetgyökfüggvény grafikonját ( $f(cx + d)$ );
- felrajzolja és jellemzi az  $n$ -edik gyök függvény grafikonját;
- megadott függvényekből tud összetett függvényt képezni, függvény inverzét venni.

#### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Hétköznapi hozzárendelések megfigyelése, tulajdonságainak megfogalmazása: egyértelmű, kölcsönösen egyértelmű
- Függvény megadása, alapvető függvénytani fogalmak ismerete
- Az alapvető függvénytani fogalmak pontos definíciójának ismerete
- A függvények összege, különbsége, szorzata és hányadosa fogalmának ismerete és alkalmazása
- A függvények megszorítása (leszűkítése) és kiterjesztése fogalmának ismerete és alkalmazása
- Az inverzfüggvény fogalmának ismerete és alkalmazása
- Az összetett függvény fogalmának, képzési módjának ismerete, alkalmazása
- Függvényértékek meghatározása és táblázatba rendezése
- Függvények ábrázolása táblázat alapján
- Függvények alkalmazása valós, hétköznapi helyzetek jellemzésére, gyakorlati problémák megoldására
- A grafikon alapján a függvény értelmezési tartományának, értékészletének, minimumának, maximumának és zérushelyének megállapítása, a növekedés és fogyás leolvasása
- Ismerje, tudja ábrázolni és jellemezni az alábbi hozzárendeléssel megadott függvényeket:
  - $x \mapsto ax + b$
  - $x \mapsto x^2$
  - $x \mapsto ax^2 + bx + c$
  - $x \mapsto \sqrt{x}$
  - $x \mapsto \frac{1}{x}$
  - $x \mapsto |x|$
  - $x \mapsto \frac{a}{x}$
  - $x \mapsto x^n$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ )
- Tudjon a felsorolt függvényekből összetett függvényeket képezni
- Lineáris függvények (lineáris kapcsolatok felfedezése a hétköznapokban)
- Másodfokú függvény (teljes négyzetté kiegészítés)
- Fordított arányosságot leíró elsőfokú törtfüggvény (elemi függvények) grafikonja, tulajdonságai
- Négyzetgyökfüggvény
- Abszolútérték függvény (több abszolútértéket tartalmazók is)
- Egészrész-, törtrész-, előjelfüggvény, Dirichlet-függvény
- Függvény korlátossága; szuprémum, infimum
- Elemi függvényekkel egyszerű függvénytranszformációs lépések végrehajtása:  $f(x) + c$ ,  $f(x + c)$ ,  $c \cdot f(x)$ ,  $|f(x)|$ ,  $f(|x|)$ ,  $f(cx)$ ,  $cf(x + b) + d$ ,  $cf(ax) + d$  és  $f(cx + d)$  (A transzformációk rendszerezése, transzformációs sorrend)
- Függvények hozzárendelési utasításának leolvasása grafikon alapján
- Egyszerű függvények esetén az  $f(x) = c$  alapján  $x$  meghatározása és ennek alkalmazása gyakorlati problémák megoldása során
- Injektív, szürjektív, bijektív leképezések
- A függvények periodicitás, paritás, korlátosság szempontjából való jellemzése
- A függvények tulajdonságainak meghatározása az alapfüggvények ismeretében, transzformációk segítségével
- A konvexitás és konkavitás fogalmának ismerete, alkalmazása
- Másodfokú függvényre vezető szélsőérték-feladatok megoldása

### **FOGALMAK**

egyértelmű hozzárendelés, kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés, értelmezési tartomány, képhalmaz, értékészlet, helyettesítési érték, szélsőérték, zérushely, növekedés, fogyás, konvexitás, konkavitás

### **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET**

- Összetett, valódi helyzetekkel, például demográfiai kérdésekkel, pénzügyi feladatokkal kapcsolatos grafikonok elemzése csoportmunkában
- Hétköznapi helyzetekben időben változó folyamatokkal kapcsolatos mérések végzése és a mért adatok ábrázolása koordináta-rendszerben (például hőmérséklet)
- A tanulók mindennapi életéhez kapcsolódó grafikonok ábrázolása és elemzése (például út-idő grafikon az iskolába való eljutásról)
- Egyszerű, másodfokú függvénnyel jellemezhető, gyakorlati helyzethez köthető szélsőérték-feladatok megoldása csoportmunkában, például adott hosszúságú spárgával bekeríthető maximális területű téglalap adatainak mérése, megfigyelése
- Függvények ábrázolása digitális eszköz segítségével
- Barkochba játék a függvényekkel kapcsolatos fogalmak használatával
- Szöveges feladatok megoldása grafikus úton
- Algebrai úton nem vagy nehezen megoldható egyenletek közelítő megoldása grafikus úton digitális eszköz segítségével
- *Fizika*: ideális gáz, izoterma (a fordított arányosságnál)

### **TÉMAKÖR: GEOMETRIAI ALAPISMERETEK**

#### **JAVASOLT ÓRASZÁM: 7 + 0 óra**

#### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

#### **A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri és feladatmegoldásban alkalmazza a térelemek kölcsönös helyzetét, távolságát és hajlásszögét;
- felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot;
- tisztában van az alapfogalmak és az axiómák jelentőségével.

#### **A témakör tanulása eredményeként a tanuló**

#### **a 9. évf. végére:**

- ismeri és használja a pont, egyenes, sík (térelemek) és szög fogalmát;
- ismeri és alkalmazza a nevezetes szögpárok tulajdonságait;
- ismeri az alapszerkesztéseket, és ezeket végre tudja hajtani hagyományos vagy digitális eszközzel;
- ismeri a szakaszfelező merőlegest és a szögfelezőt mint bizonyos tulajdonságú ponthalmazokat;
- megold szerkesztési feladatokat.

#### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Két pont, pont és egyenes, két egyenes távolságának alkalmazása a síkban
- Egyenesek kölcsönös helyzetének ismerete és alkalmazása

- Nevezetes szögpárok tulajdonságainak ismerete és alkalmazása: pótszögek, mellékszögek, kiegészítő szögek, csúcpszögek, egyállású szögek, váltószögek
- A szakaszfelező merőleges és a szögfelező mint ponthalmazok tulajdonságainak ismerete
- Dinamikus geometriai szoftver alkalmazásának előkészítése, használata
- Alapszerkesztések végrehajtása hagyományos vagy digitális eszközzel euklideszi módon: szakaszfelező merőleges, szögfelező, merőleges és párhuzamos egyenesek szerkesztése, szög másolása
- Geometriai alapfogalmak, axiómák
- Nemeuklideszi geometriák (említés szintjén)
- Tételek; kölcsönös helyzete, távolsága, szöge síkban és térben
- Nevezetes ponthalmazok rendszerezése
  - adott térelemtől adott távolságra lévő pontok halmaza – síkban és térben
  - két térelemtől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza – síkban és térben
  - parabola, ellipszis, hiperbola
- Két vagy három feltételnek megfelelő ponthalmazok szerkesztése

#### **FOGALMAK**

pont, egyenes, sík, szögtartomány, hajlásszög, párhuzamos, merőleges, pótszögek, mellékszögek, kiegészítő szögek, csúcpszögek, egyállású szögek, váltószögek, szakaszfelező merőleges, szögfelező, parabola, ellipszis, hiperbola

#### **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET**

- Az osztályteremben vagy a terem környezetében „egyenesek” kölcsönös helyzetének megadása, ezek távolságának megmérése
- Számszerű adatként csak a méretarányt tartalmazó térkép alapján valódi távolságok meghatározása, becslése
- Számszerű adatként csak méretarányt tartalmazó térképen adott helységektől (közelítőleg) egyenlő távolságra levő helységek megkeresése

#### **TÉMAKÖR: HÁROMSZÖGEK**

#### **JAVASOLT ÓRASZÁM: 28 + 10 óra**

#### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

##### **A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri a mérés alapelvét, alkalmazza konkrét alap- és származtatott mennyiségek esetén;
- ismeri a hosszúság, terület, térfogat, űrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
- sík- és térgeometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben adja meg választ;
- kiszámítja háromszögek területét.

##### **A témakör tanulása eredményeként a tanuló**

##### **a 9. évf. végére:**

- ismeri és alkalmazza a háromszögek oldalai, szögei, oldalai és szögei közötti kapcsolatokat; a speciális háromszögek tulajdonságait;



- ismeri és alkalmazza a háromszög nevezetes vonalaira, pontjaira és köreire vonatkozó fogalmakat és tételeket;
- ismeri a háromszögek egybevágóságának alapeseteit;
- a háromszögek egybevágóságát alkalmazza tételek bizonyításában, feladatok megoldásában;
- ismeri és bizonyítja a háromszög területére vonatkozó  $T = rs, T = r_a(s - a)$  képletet és a Heron-képletet (ennek bizonyítása emelten már nem követelmény);
- ismeri és alkalmazza a Pitagorasz-tételt és megfordítását;
- ismeri a paralelogramma-tételt és a háromszög súlyvonalképletét;
- bizonyítja a háromszög nevezetes vonalaira, pontjaira és köreire vonatkozó tételeket.

**a 10. évf. végére:**

- ismeri a háromszögek hasonlóságának alapeseteit;
- a háromszögek hasonlóságát alkalmazza tételek bizonyításában, feladatok megoldásában;
- bizonyítja és alkalmazza a befogótételt és magasságtételt.

**FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- A háromszögek csoportosítása oldalak és szögek szerint
- Az alapvető összefüggések ismerete és alkalmazása háromszögek oldalai, szögei, oldalai és szögei között (háromszög-egyenlőtlenség, belső, illetve külső szögek összege, nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van)
- Speciális háromszögek tulajdonságainak ismerete és alkalmazása: szabályos, egyenlő szárú, derékszögű háromszög
- A háromszög nevezetes vonalaira, pontjaira és köreire vonatkozó fogalmak, tételek ismerete és alkalmazása: oldalfelező merőleges, szögfelező, magasságvonal, magasságpont, súlyvonal, súlypont, középvonal, körülírt, illetve beírt kör
- Az oldalfelező merőlegesek és a belső szögfelezők metszéspontjára vonatkozó tétel bizonyítása
- Háromszög hozzáírt körei
- Középvonalak (négyyszögek középvonalai is). Varignon-tétel
- Magasságvonalak – magasságpont
- Súlyvonalak – súlypont
- A Pitagorasz-tétel és megfordításának ismerete és alkalmazása
- A Pitagorasz-tétel bizonyítása
  - Mikor hegyesszögű, illetve tompaszögű a háromszög?
  - Paralelogramma-tétel, súlyvonalképlet
  - Négyyszög átlói merőlegességének a feltétele
  - Heron-képlet
- A Pitagorasz-tétel megfordításnak bizonyítása
- Háromszög területének kiszámítása, a hozzáírt körrel kapcsolatos területképlet is
- A magasságtétel és a befogótétel alkalmazása a nevezetes közepek megszerkesztésére és a köztük fennálló egyenlőtlenségek bizonyítására
- A magasság- és a befogótétel bizonyítása

**FOGALMAK**

szabályos háromszög, egyenlő szárú háromszög, derékszögű háromszög, oldalfelező merőleges, szögfelező, magasságvonal, súlyvonal, középvonal, körülírt kör, beírt kör

**JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET**

- A háromszög nevezetes vonalaira, pontjaira és köreire vonatkozó tételek felfedeztetése szerkesztéssel vagy dinamikus geometriai szoftver alkalmazásával, páros vagy csoportmunkában
- Konkrét alakzatok átdarabolása más alakzattá páros vagy csoportmunkában
- A derékszögű háromszög oldalaira szerkesztett négyzetek átdarabolása a Pitagorasz-tételnek megfelelő módon, pitagorasz-i tangramok vagy dinamikus geometriai szoftver alkalmazásával
- A magasságtétel és a befogótétel alkalmazása a nevezetes közepek megszerkesztésére és a köztük fennálló egyenlőségek bizonyítására
- Két pont távolsága a koordináta-síkon (a koordináta-geometria előkészítése)
- *Matematikatörténet*: Pitagorasz
- Ceva- és Menelaosz-tétel

#### TÉMAKÖR: NÉGYSZÖGEK, SOKSZÖGEK

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 4 + 4 óra**

#### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri a mérés alapelvét, alkalmazza konkrét alap- és származtatott mennyiségek esetén;
- ismeri a hosszúság, terület, térfogat, űrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
- sík- és térgeometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben adja meg válaszát;
- ismeri és alkalmazza speciális négyszögek tulajdonságait, területüket kiszámítja;
- átdarabolással kiszámítja sokszögek területét.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló**

**a 9. évf. végére:**

- ismeri és alkalmazza a szabályos sokszög fogalmát; kiszámítja a konvex sokszög belső és külső szögeinek összegét, átlóinak számát;
- ismeri a paralelogramma néhány karakterisztikus tulajdonságát.

**a 10. évf. végére:**

- speciális négyszögek (trapéz, húrtrapéz, paralelogramma, deltoid, rombusz, téglalap, négyzet) tulajdonságainak ismerete, területének kiszámítása;
- ismeri a négyszögek egybevágóságának és hasonlóságának feltételeit, ezeket alkalmazza;
- bizonyítja a húrnégyszögek és érintőnégyzsögek tételét, ismeri a tételek megfordítását;
- ismereteit alkalmazza feladatok megoldásában;
- ismeri (és alkalmazza) a Ptolemaiosz-tételt.

#### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Speciális négyszögek (trapéz, húrtrapéz, paralelogramma, deltoid, rombusz, téglalap, négyzet) tulajdonságainak ismerete, területének kiszámítása
- Konvex sokszögeknél az átlók számára, a belső és külső szögösszegre vonatkozó tételek ismerete, bizonyítása és alkalmazása
- Szabályos sokszög fogalmának ismerete
- Szabályos sokszög területe átdarabolással

### **FOGALMAK**

trapéz, húrtrapéz, paralelogramma, deltoid, rombusz, téglalap, négyzet, konvex sokszög, szabályos sokszög

### **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET**

- Különböző típusú speciális négyszögek területének meghatározására vonatkozó formula felfedeztetése átdarabolással
- A belső és a külső szögösszegre vonatkozó tételek felfedeztetése, illusztrálása átdarabolással, hajtogatással vagy dinamikus geometriai szoftver segítségével
- Projektmunka: lakás/iskola alaprajzának elkészítése méretarányosan

### **TÉMAKÖR: A KÖR ÉS RÉSZEI**

#### **JAVASOLT ÓRASZÁM: 9 + 18 óra**

#### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

##### **A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri a mérés alapelvét, alkalmazza konkrét alap- és származtatott mennyiségek esetén;
- ismeri a hosszúság, terület, térfogat, űrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
- sík- és térgeometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben adja meg választát.

##### **A témakör tanulása eredményeként a tanuló**

###### **a 9. évf. végére:**

- ki tudja számolni a kör és részeinek kerületét, területét;
- ismeri a kör érintőjének fogalmát, kapcsolatát az érintési pontba húzott sugárral;
- ismeri és alkalmazza a Thalész-tételt és megfordítását;
- ismeri és használja a  $15^\circ$ -os derékszögű háromszög tulajdonságait.

###### **a 10. évf. végére:**

- alkalmazza a körrel kapcsolatos tételeket: kerületi- és középponti szögek tétele, kerületi szögek tétele, húrszakaszok tétele, körhöz külső pontból húzott érintő- és szelőszakaszok tétele.

#### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Annak ismerete és alkalmazása, hogy a középponti szög egyenesen arányos a hozzá tartozó körív hosszával
- Annak ismerete és alkalmazása, hogy a középponti szög egyenesen arányos a hozzá tartozó körcikk területével
- Kör, körcikk, körgyűrű és körszelet területének és kerületének kiszámítása
- Annak ismerete és alkalmazása, hogy a kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, és hogy külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak
- Annak bizonyítása, hogy a kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, és hogy külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak
- A Thalész-tétel és megfordításának ismerete és alkalmazása
- A Thalész-tétel és megfordításnak bizonyítása
- Körérintő szerkesztése, két kör közös érintője is

- Szög mérése ívmértékkel; fok és ívmérték közti kapcsolat ismerete, alkalmazása
- Bizonyítsa és alkalmazza feladatokban a kerületi és középponti szögek tételét és a kerületi szögek tételét
- Ismerje és használja a látókör fogalmát
- Bizonyítsa a húrnégyszögek és az érintőnégyzetek tételét, ismerje a tételek megfordítását. Ismereteit alkalmazza feladatok megoldásában.
- Húrnégyszög tételének megfordításának ismerete és bizonyítása
- Érintőnégyzetek tétele és megfordítása
- A talpponti háromszög tulajdonságai
- Ptolemaiosz-tétel
- Húrszakaszok tétele
- Érintő- és szelőszakaszok tétele
- Aranymetszés
- Pontnak körre vonatkozó hatványa

#### **FOGALMAK**

középponti szög, körív, körcikk, körgyűrű, körszelet, érintőszakaszok  
ívmérték, radián

#### **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET**

- Annak felfedeztetése méréssel, hogy a középponti szög egyenesen arányos a hozzá tartozó körív hosszával; különböző méretű körök esetén a kapott adatok táblázatba foglalása
- A Thalész-tétel felfedeztetése szerkesztéssel, szögméréssel vagy dinamikus geometriai szoftver alkalmazásával
- Trimino alkalmazása a fok és az ívmérték közötti kapcsolat játékos gyakorlására
- *Matematikatörténet: Thalész, Ptolemaiosz, Apollóniusz*
- Apollóniusz-kör

#### **TÉMAKÖR: TRANSZFORMÁCIÓK, SZERKESZTÉSEK**

#### **JAVASOLT ÓRASZÁM: 14 + 12 óra**

#### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri és alkalmazza a hasonló síkidomok kerületének és területének arányára vonatkozó tételeket.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló**

**a 9. évf. végére:**

- ismer példákat geometriai transzformációkra;
- ismeri a geometriai transzformációk és a függvények kapcsolatát;
- tudja pontosan megfogalmazni az egybevágósági transzformációk definícióit, a síkidomok egybevágóságának fogalmát, valamint a sokszögek egybevágóságának feltételét;
- ismeri és alkalmazza a síkbeli egybevágósági transzformációkat és tulajdonságukat; alakzatok egybevágóságát;

- ismeri és tudja alkalmazni feladatokban a háromszögek egybevágóságának alapeseteit;
- megszerkeszti egy alakzat tengelyes, illetve középpontos tükröképét hagyományosan és digitális eszközzel;
- megszerkeszti egy alakzat pont körüli elforgatottját, párhuzamos eltolját hagyományosan és digitális eszközzel;
- ismeri a vektorokkal kapcsolatos alapvető fogalmakat, vektorokkal kapcsolatos műveleteket végez;
- az egybevágósági transzformációkat alkalmazza szerkesztési feladatokban, minimális út meghatározásánál;
- geometriai szerkesztési feladatoknál vizsgálja és megállapítja a szerkeszthetőség feltételeit;
- ismer példát térbeli egybevágósági transzformációkra.

**a 10. évf. végére:**

- ismeri a középpontos hasonlósági transzformáció és a hasonlósági transzformáció definícióját;
- ismeri és alkalmazza a párhuzamos szelők tételét, a tétel megfordítását és a párhuzamos szelőszakaszok tételét;
- tudja, hogy az iménti tételekből következnek a középpontos hasonlósági transzformáció tulajdonságai;
- ismeri és tudja alkalmazni feladatokban a háromszögek hasonlóságának alapeseteit;
- ismeri és alkalmazza a hasonló síkidomok kerületének és területének arányára vonatkozó tételeket;
- bizonyítja és alkalmazza a belső szögfelező tételt;
- ismeri és alkalmazza feladatokban a merőleges vetítést.

**FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Példák ismerete geometriai hozzárendelésekre (merőleges vetítés, párhuzamos vetítés, merőleges affinitás, térkép, fényképezés)
- A tengelyes tükrözés, a középpontos tükrözés, a pont körüli forgatás és a párhuzamos eltolás ismerete, tulajdonságaik (szögtartás, távolságtartás, irányítástartás, egyenes képe egyenes, fixpont, fix egyenes, fix sík)
- „Lekváros kenyeres” feladatok (egybevágósági transzformációk alkalmazása szerkesztési feladatokban)
- Geometriai szélsőérték-feladatok.
  - Minimális út, háromszögbe írt minimális kerületű háromszög.
  - Izogonális pont minimum-tulajdonsága (dinamikus szerkesztőprogrammal megsejtve)
- Egybevágósági transzformációk szorzata
- Egybevágósági transzformációk végrehajtása szerkesztéssel vagy digitális eszközzel
- Egybevágó alakzatok, szimmetriák megfigyelése a környezetben, művészeti alkotásokban
- Az egybevágósági transzformációk alkalmazása feladatok megoldásában, tételek bizonyításában
- Háromszögek egybevágóságának alapesetei és ezek alkalmazása (Például a paralelogramma karakterisztikus tulajdonságai)
- Négyszögek egybevágósága
- Egyszerű szerkesztési feladatok megoldása hagyományos vagy digitális eszközzel; diskusszió

- Gyakorlati feladatok megoldása egybevágóságok segítségével (például a sík parkettázása különféle síkidomokkal; szabásminta készítése, használata)
- A vektorműveletekre vonatkozó műveleti azonosságok ismerete és alkalmazása
- A párhuzamos szelők tétele és megfordítása, párhuzamos szelőszakaszok tétele és következményeik:
  - Szakasz arányos osztása
  - Negyedik arányos szerkesztése
  - Szögfelezőtétel
  - Párhuzamos szelőszakaszok tétele
- A középpontos hasonlósági transzformáció és a hasonlósági transzformáció ismerete, tulajdonságai
- Euler-egyenes
- A hasonlóság fogalmának ismerete és alkalmazása feladatok megoldásában, tételek bizonyításában
- Háromszögek hasonlóságának alapesetei
- Gyakorlati feladatok megoldása hasonlóság segítségével (például alaprajz-, térképkészítés, modellezés)
- Szerkesztési, számítási, bizonyítási feladatok

#### **FOGALMAK**

tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés, pont körüli forgatás, párhuzamos eltolás, egybevágóság, forgásszög, vektor, vektorok abszolútértéke, nullvektor, ellentett vektor, vektorok összege, különbsége, vektor skalárszorosa, középpontos hasonlósági transzformáció, hasonlósági transzformáció, hasonlóság, a hasonlóság aránya

#### **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET**

- Gyakorlati példák keresése geometriai hozzárendelésekre, például fényképezés, filmvetítés
- A középpontos tükrözés, a pont körüli forgatás és a párhuzamos eltolás bemutatása mint két tengelyes tükrözés egymásutánja
- M. C. Escher és Victor Vasarely néhány interneten is elérhető alkotásának elemzése a szimmetriák szempontjából; hasonló módszerrel képek alkotása
- A sík parkettázása egybevágó háromszögekkel, négyszögekkel papírsablonok vagy dinamikus geometriai szoftver segítségével
- A tengelyes vagy középpontos szimmetriára alapozó stratégiai játékok (például pénzforgató, színezős) páros munkában
- Az iskola közelében lévő magas épület (például templomtorony) magasságának meghatározása egy egyenes bot segítségével a bot és az épület árnyékának méréséből („Thalész-módszer”) csoportmunkában
- Valódi távolságok, valódi útvonalak hosszának meghatározása papíralapú térkép alapján
- A háromszögek egybevágóságának és hasonlóságának alapeseteinél a szükséges és elégséges feltétel megkülönböztetése (Pl. ha a szögeik páronként megegyeznek, akkor hasonló, ebből viszont következik a megfelelő oldalak arányának egyenlősége)
- *Vizuális kultúra*: az aranymetszés megjelenése a természetben, alkalmazása a művészetekben.
- *Földrajz*: térképkészítés, térképolvasás
- Inverzió és tulajdonságai (szerkesztő programmal is)

TÉMAKÖR: VEKTOROK

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 4 + 11 óra**

**TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri a vektorokkal kapcsolatos alapvető fogalmakat;
- ismer és alkalmaz egyszerű vektorműveleteket;
- alkalmazza a vektorokat feladatok megoldásában.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló**

**a 9. évf. végére:**

- ismeri a vektorokkal kapcsolatos alapvető fogalmakat, vektorokkal kapcsolatos műveleteket végez (többféle módszerrel is tud két vektort összeadni és kivonni).

**a 10. évf. végére:**

- ismeri és alkalmazza a vektorműveletekre vonatkozó műveleti azonosságokat;
- meghatározza osztópont helyvektorát, háromszög, négyszög, tetraéder súlypontjának helyvektorát;
- ismeri a vektorfelbontást, vektorkoordináták meghatározását adott bázisrendszerben;
- számol vektorkoordinátákkal;
- vektorokat alkalmaz feladatok megoldásában, tételek bizonyításában.

**FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- A vektor fogalmának kialakítása a párhuzamos eltolás segítségével
- Műveletek vektorokkal:
  - Összeadás, kivonás, számmal való szorzás
  - Ismeri az egyértelmű vektorfelbontás tételét
  - Osztópont helyvektora, háromszög súlypontjának helyvektora, Feuerbach-kör
  - Háromszög magasságpontjának helyvektora
  - Vektorok térben
  - Vektor koordinátái
  - Analógia a számhalmazokon végzett műveletekkel

**FOGALMAK**

vektor, vektorok összege, különbsége; vektorfelbontás, vektor koordinátái

**JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET**

- *Fizika:* erők összege

TÉMAKÖR: TRIGONOMETRIA

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 21 óra**

**TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- matematikai és fizikai feladatokban is tudja alkalmazni a trigonometriai ismereteit.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló**

**a 10. évf. végére:**

- ismeri hegyesszögek szögfüggvényeinek definícióját a derékszögű háromszögben;
- összefüggéseket ismeri hegyesszögek szögfüggvényei között;
- a szögfüggvény értékének ismeretében meghatározza a szöget;
- ismeri a szögfüggvények kiterjesztésének definícióját, azok geometriai megjelenítését;
- alkalmazza forgásszögekre a középszinten szereplő összefüggéseket;
- hegyesszögre visszavezetéssel is meg tudja határozni a szögfüggvények értékét;
- egyszerű trigonometrikus egyenletet megold (grafikusan is);
- ábrázolja, jellemzi a trigonometrikus függvényeket és azok transzformációit.

**FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Hegyesszög szinusza, koszinusza, tangense
- Számítások derékszögű háromszögekben szögfüggvények segítségével gyakorlati helyzetekben
- Nevezetes szögek szögfüggvényei:
  - $30^\circ$ ;  $60^\circ$ ;  $45^\circ$  (megtanulandók)
  - $18^\circ$ ,  $36^\circ$ ,  $54^\circ$ ,  $72^\circ$  (kiszámolás az „aranyháromszögből”.)
- Összefüggések ismerete egy adott szög különböző szögfüggvényei között: pitagoraszai összefüggés, pótszögek és mellékszögek szögfüggvényei
- Szögfüggvény értékének ismeretében a szög meghatározása számológép segítségével
- Számítások négyszögekben, sokszögekben szögfüggvények segítségével
- A környezetben található tárgyak magasságának, pontok távolságának meghatározása mért adatokból számítva
- Négyszögek és szabályos sokszögek területének kiszámítása
- Szinusz, koszinusz, tangens értelmezése tetszőleges forgásszög esetén
- Valós számok halmazán értelmezett szögfüggvények ábrázolása, egyszerű transzformációk végrehajtása, a függvények jellemzése (értelmezési tartománya, értékkészlete, zérushelyek, szélsőérték, periódus, monotonitás). A trigonometrikus függvények transzformáltjai
- Egyszerű trigonometrikus összefüggések bizonyítása
- Egyszerű trigonometrikus egyenletek megoldása

**FOGALMAK**

szinusz, koszinusz, tangens, kotangens ~~szinusztétel, koszinusztétel~~

**JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET**

- Épület magasságának meghatározása a látószög és a távolságok mérésének segítségével csoportmunkában
- Interaktív digitális eszközök használata a valós számok halmazán értelmezett szögfüggvények szemléltetéséhez
- A szögfüggvények szerepének bemutatása a harmonikus rezgőmozgást jellemző mennyiségekben

TÉMAKÖR: LEÍRÓ STATISZTIKA

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 0 + 10 óra**



## TANULÁSI EREDMÉNYEK

### A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- adott cél érdekében tudatos adatgyűjtést és rendszerezést végez;
- hagyományos és digitális forrásból származó adatsokaság alapvető statisztikai jellemzőit meghatározza, értelmezi és értékeli;
- felismer grafikus manipulációkat diagramok esetén.

### A témakör tanulása eredményeként a tanuló

#### a 10. évf. végére:

- adatsokaságból adott szempont szerint oszlop- és kördiagramot készít hagyományos és digitális eszközzel;
- diagramból gyakorisági táblázatot készít;
- kiszámítja adatsokaság középvértékeit;
- meg tud oldani középvértékekkel kapcsolatos gondolkodtató feladatokat.

## FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Statisztikai adatok gyűjtésének tervezése
- Statisztikai adatok gyűjtése hagyományos és internetes forrásból
- Statisztikai adatok rendszerezése, jellemzése középvértékekkel hagyományos és digitális eszközzel
- A kapott adatok értelmezése, értékelése, egyszerű statisztikai következtetések
- Oszlop- és kördiagram értelmezése, valamint készítése hagyományos és digitális eszközzel
- Konkrét adatsokaság ábrázolásához, statisztikai kérdés megválaszolásához a megfelelő diagramtípus kiválasztása
- Kördiagramból oszlopdiagram készítése és viszont
- Grafikus manipulációk felismerése és javítása diagramok esetén
- A középvértékek tulajdonságainak és alkalmazhatóságának ismerete

## FOGALMAK

oszlopdiagram, kördiagram, átlag, medián, módusz

## JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET

- Adatgyűjtés megtervezése, például forgalomszámlálás vagy iskolai felmérés előkészítése
- A megtervezett statisztikai adatgyűjtés lebonyolítása, az eredmények szemléltetése grafikonok segítségével, a kapott eredmények értékelő bemutatása tanulói kiselőadás formájában
- Különböző adatsokaságok esetében annak vizsgálata, hogy ezek jellemezhetők-e az ismert középvértékekkel
- Érvelés a tanuló saját érdemjegyei alapján különböző statisztikai jellemzők segítségével a kedvezőbb év végi jegyért
- Különböző sportágak értékelési rendszerének és statisztikáinak bemutatása tanulói kiselőadás keretében
- Osztályok/tantárgyak eredményeinek összehasonlítása érdemjegyek és ezek középvértékei alapján
- Csoportmunka keretében adott céllal készülők, megtévesztő oszlop- és kördiagramok készítése, ezek szóbeli értékelése, javítása
- *Történelem:* történelmi, társadalmi témák vizuális ábrázolása (táblázat, diagram).

Helyi tanterv négy évfolyamos speciális matematika 6 óra

- *Földrajz*: időjárási, éghajlati és gazdasági statisztikák.

#### TÉMAKÖR: VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 0 + 8 óra**

#### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- konkrét valószínűségi kísérletek esetében az esemény, eseménytér, elemi esemény, relatív gyakoriság, valószínűség, egymást kizáró események, független események fogalmát megkülönbözteti és alkalmazza.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló**

**a 10. évf. végére:**

- tapasztalatai alapján véletlen jelenségek jövőbeni kimenetelére ésszerűen tippel;
- véletlen kísérletek adatait rendszerezi, relatív gyakoriságokat számol, nagy elemszám esetén számítógépet alkalmaz;
- feladatokban alkalmazza a valószínűség-számítás klasszikus (Laplace) modelljét.

#### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Valószínűségi kísérletek elvégzése, gyakorisági, relatív gyakorisági táblázatok készítése
- A valószínűség fogalmának bevezetése statisztikai alapon
- A klasszikus valószínűségi modell fogalma és alkalmazása
- Diszkrét valószínűség-eloszlások ábrázolása hagyományos és digitális eszközzel

#### FOGALMAK

valószínűségi kísérlet, esemény, elemi esemény, gyakoriság, relatív gyakoriság, valószínűség, diszkrét valószínűség-eloszlás

#### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET

- Konkrét valószínűségi kísérletek végrehajtása vagy dinamikus szoftver segítségével történő szimulálása (például dobások szabályos dobókockákkal, pénzérmékkel); a kapott gyakoriságok és relatív gyakoriságok táblázatba foglalása; tippelés az egyes kimenetekre és becslés a bekövetkezésük valószínűségére
- Játékokban a szerencsefaktor vizsgálata, például „Ki nevet a végén” játék esetében az első hatos dobás eloszlása
- Különböző társasjátékokban stratégia meghatározása, döntéshozatal esélylatolgatás alapján
- Különböző szerencsejátékok (lottó, totó, póker, black jack, internetes sportfogadások) esetében a nyerési esély összehasonlítása

## 11–12. évfolyam

Pirossal a specmatos kiegészítések a középshinthez, illetve az emelt shinthez képest

Kékkel az emelt érettségi követelmények miatti kötelező kiegészítések

A 11–12. évfolyamon a tanulási-tanítási folyamatra jellemző, hogy az ismeretek jellege egyre absztraktabb és formálisabb, a matematika belső logikája egyre jobban érvényesül. Ebben a szakaszban az egyik nagyon fontos didaktikai cél a szimbolikus gondolkodás fejlesztése. A tanulóknak a korábban elsajátított készségekre, képességekre és ismeretanyagra támaszkodva kell eljutniuk az absztrakt összefüggések megértéséhez és tudatos alkalmazásához. Tudatosítani kell a matematikai fogalmak pontos definiálásának fontosságát és a matematikai bizonyítások szerepét. Amellett, hogy a lehetséges alkalmazásokat minden egyes témakör kapcsán szem előtt kell tartani, fontos, hogy a tanulók lássák az egyes matematikai területek kapcsolatát is.

Fontos cél, hogy az ismeretszerzési folyamat során a tanuló a tanár által irányított módon, a feladatok megoldása mentén maga fedezze fel az összefüggéseket, általánosítási lehetőségeket, megoldási módokat. A kooperatív munkaformák, a projektfeladatok ebben a szakaszban is fejlesztik a kommunikációt. Az érettségi vizsgára készülés során egyre nagyobb hangsúlyt kap a tanulók önálló munkája mind a feladatmegoldásokban, mind a tanultak ismétlésében, rendszerezésében. A digitális eszközök támogatják a szemléltetést, a megértést, a felfedeztetést és a gyakorlást.

Bizonyos témakörök ebben a szakaszban jelennek meg először. Ilyen a racionális kitevőjű hatvány, az exponenciális függvény, a logaritmus, a számtani és mértani sorozatok, a trigonometria, a koordinátageometria és a térgeometria. Az algebrai eszközök és a függvényekkel kapcsolatos ismeretek bővülése, a trigonometria és a koordinátageometria alapjainak megjelenése, valamint a statisztikai és valószínűségi szemlélet mélyülése további lehetőségeket nyújt változatos hétköznapi és matematikai problémák megoldására. A matematikai eszköztár bővülése ebben a szakaszban teszi leginkább lehetővé, hogy a tanulók más tantárgyakban, más tanulási területeken is alkalmazni tudják matematikai tudásukat.

**A 11–12. évfolyamon a matematika tantárgy óraszám 462 óra. Rendszerező összefoglalásra, az érettségi vizsgára történő felkészítésre a 12. évfolyam végén 64 óra áll rendelkezésre. Az egyes témakörökhöz írt óraszámok javaslatok. Az új ismeretek a teljes óraszám négyötöd része alatt a legtöbb tanuló számára elsajátíthatók, így a fennmaradó órák felhasználhatók ismétlésre, gyakorlásra, felzárkóztatásra, tehetséggondozásra és számonkérésre.**

**A témakörök áttekintő táblázata:**

<b>Témakör neve</b>	<b>11. évf.</b>	<b>12. évf.</b>
Halmazok, matematikai logika	16	11
Kombinatorika, gráfok	18	9
Hatvány, gyök, exponenciális függvény, logaritmus	14	0
Exponenciális folyamatok vizsgálata	30	0
Sorozatok	28	14
Differenciál-számítás	40	0
Integrálszámítás	0	26
Komplex számok	0	10
Lineáris algebra	16	0
Trigonometria, geometriai egyenlőtlenségek, szélsőérték-feladatok, nevezetes egyenlőtlenségek	42	9
Koordinátageometria	34	0
Térgeometria	0	40
Leíró statisztika	0	10
Valószínűség-számítás	0	31
Rendszerező összefoglalás	0	72
<b>Összes óraszám:</b>	<b>238</b>	<b>224</b>

**TÉMAKÖR: Halmazok, matematikai logika**

**JAVASOLT ÓRASZÁM:**  $16 + 11 = 27$  óra

**TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló**

**a 11. évf. végére:**

- ismerje a halmazok ekvivalenciáját;
- ismerje a megszámlálhatóan végtelen halmaz definícióját;
- bizonyítsa egyszerűbb esetekben, hogy egy halmaz számossága megszámlálhatóan végtelen;
- alkalmazza a teljes indukciós bizonyítási módszert;
- tudja, hogy a valós számok halmaza nem megszámlálható (kontinuum számosság).

**a 12. évf. végére:**

- látja a halmazműveletek és a logikai műveletek közötti kapcsolatokat;
- megállapítja egyszerű „ha ... , akkor ...” és „akkor és csak akkor” típusú állítások logikai értékét;
- tud egyszerű állításokat indokolni és tételeket bizonyítani;
- ismeri az axióma és az alapfogalom fogalmát;
- találkozik geometriai modellekkel.

**FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- A halmazműveletek és a logikai műveletek közötti kapcsolatok bemutatása példákon keresztül
- Logikai kifejezések megfelelő használata
- Egyszerű állítások indoklása, tételek bizonyítása
- Stratégiai és logikai játékok
- Teljes indukció ismerete, alkalmazása

- Összegképletek bizonyítása
- Oszthatósági feladatok megoldása teljes indukcióval
- Közepek közti egyenlőtlenség bizonyítása ( $n$ -re)
- Halmazok ekvivalenciája. A természetes számokkal, ill. a valós számokkal ekvivalens halmazok.
- A valós számok halmaza nem megszámlálható. A valós számok halmazának és irracionális számok halmazának ekvivalenciája. A megszámlálható és a kontinuumszámosság.
- Egyenes, szakasz (nyílt és zárt), körvonal pontjainak halmaza, körlemez és négyzet, háromszög és négyzet stb., gömbfelület és sík stb. poliéder és gömb stb. pontjainak halmaza között egy-egyértelmű leképezés van.
- Valós számok és végtelen hosszú 0-1 sorozatok ekvivalenciája. Sík és egyenes ekvivalenciája és ennek következményei:  $n$ -dimenziós tér,  $n$ -edfokú polinomok, komplex számok stb. és valós számok ekvivalenciája.
- Cantor-féle átlós módszer

### FOGALMAK

logikai műveletek, axióma, alapfogalom, konstruktív- és egzisztenciabizonyítás, halmazok ekvivalenciája

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET

- A tanulók mindennapi tapasztalataihoz köthető, összetett állítások logikai értékének meghatározása igazságtáblázat segítségével
- Rejtvényújságokban szereplő feladványok megfejtése következtetések láncolatán keresztül
- Logikai készséget fejlesztő játékok, például „Einstein-fejtörő”
- Stratégiai játékok, például NIM játékok, táblás játékok
- Tudatos pénzügyi tervezést segítő játékok
- Kontinuumhipotézis
- Gödel nemteljességi tétele
- További lehetőségek: Az algebrai számok halmaza megszámlálható. A transzcendens valós számoké kontinuum. A Cantor-halmaz számossága és „szerkezetének” vizsgálata.

### TÉMAKÖR: Kombinatorika, gráfok

**JAVASOLT ÓRASZÁM:  $18 + 9 = 27$  óra**

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
- a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
- a kiválasztott modellben megoldja a problémát.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló**

**a 11. évf. végére:**

- tud visszatevéses mintavételt számítani
- tud visszatevés nélküli mintavételt számítani

**a 12. évf. végére:**

- konkrét szituációkat szemléltet és egyszerű feladatokat megold gráfok segítségével
- Ramsey-típusú feladatok

**FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Mintavétel visszatevéssel és visszatevés nélkül
- Ismétléses kombináció
- Kombinatorikai feladatok megoldása a komplementer esetek meghatározásának segítségével
- Gráf vagy komplementere összefüggő
- Részhalmazok ábrázolása bináris fákkal
- Irányított gráf
- Ramsey-típusú feladatok

**FOGALMAK**

faktoriális, binomiális együttható; páros gráf

**JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET**

- Anagramma készítése a tanulók neveiből
- A pókerben előforduló lehetséges nyerő lapkombinációk számának meghatározása
- A Pascal-háromszög és tulajdonságai felfedeztetése például kéttagú összeg hatványaiban szereplő együtthatók segítségével
- Különböző szituációk kétféle módon történő összeszámlálása és ebből következő egyszerű kombinatorikus összefüggések felfedezése
- Visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel konkrét lejátssza, a tapasztalatok összegyűjtése
- Turán tétel egyszerű esetekben
- Egyszerű gráf algoritmusok (legrövidebb út, szélességi keresés)
- Feszítő fa

## TÉMAKÖR: Komplex számok

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 10 óra**

**TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- látja a testbővítés szükségességét és jelentőségét;
- széles körűen alkalmazza a komplex számokat feladatok megoldásában.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló**

**a 12. évfolyam végére:**

- számításokat végez a komplex számok körében;
- megold harmad- és negyedfokú egyenleteket.

**FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Számfogalom bővítés (mi teszi szükségessé a bővítést)
- Számolási készség elsajátítása a komplex számok körében
- Algebrai alak

Helyi tanterv négy évfolyamos speciális matematika 6 óra

- Moivre-tétel, gyökvonás komplex számokból
- Harmadfokú egyenlet megoldása, Cardano-képlet
- Negyedfokú egyenlet megoldása
- Az algebra alaptétele
- Komplex számok geometriai, trigonometriai alkalmazása

#### **FOGALMAK**

harmadfokú egyenlet. Cardano képlet, komplex számok

#### **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET**

- Fizika: váltóáram leírása komplex számokkal, Minkowski-tér
- *Matematikatörténet*: érdekességek nevezetes szerkesztési problémákról (kockakettőzés, szögharmadolás)
- *Matematikatörténet*: Tartaglia, Cardano
- Csoport, gyűrű, test fogalma, példák ezekre

### TÉMAKÖR: **Lineáris algebra**

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 16 óra**

#### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- lineáris egyenletrendszer megoldására számos új eszközzel rendelkezik.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló**

**a 11. évfolyam végére:**

- mátrixokkal műveleteket végez;
- a determináns segítségével lineáris egyenletrendszereket old meg.

#### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Mátrixok fogalma
- Műveletek mátrixokkal, műveleti tulajdonságok (a szorzás nem kommutatív)
- A pont körüli elforgatás mátrixa
- Lineáris egyenletrendszer felírása mátrixszal
- Gauss elimináció
- Négyzetes mátrix determinánsa (kétféle definíció)
- A determináns tulajdonságai (részben bizonyításokkal együtt)
- Inverz mátrix (bizonyítással)
- Cramer-szabály (bizonyítással)
- A lineáris programozás elemei (néhány feladaton keresztül)

#### **FOGALMAK**

mátrix, determináns, vektorok vektoriális szorzata

#### **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET**

- Lineáris vektortér, lineáris kombináció
- Lineáris függetlenség feltétele, lineárisan összefüggő vektorok közötti kapcsolat
- Altér (határozatlan lineáris egyenletrendszer kapcsán)

- A determináns további alkalmazásai (vektoriális szorzat, vegyes szorzat, paralelepipedon térfogata)
- Mátrix rangjának meghatározása
- Determináns számítása, egyenletrendszer megoldása számítógépes alkalmazás (pl. Excel) segítségével

### TÉMAKÖR: Hatvány, gyök, exponenciális függvény, logaritmus

#### JAVASOLT ÓRASZÁM: 14 óra

#### TANULÁSI EREDMÉNYEK

##### A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri és alkalmazza a logaritmus fogalmát.

##### A témakör tanulása eredményeként a tanuló

##### a 11. évfolyam végére:

- ismeri és alkalmazza az n-edik gyök fogalmát;
- ismeri és alkalmazza a racionális kitevőjű hatvány fogalmát és a hatványozás azonosságait;
- képlettel adott függvényt hagyományosan és digitális eszközzel ábrázol;
- adott értékészletbeli elemhez megtalálja az értelmezési tartomány azon elemeit, amelyekhez a függvény az adott értéket rendeli.
- ismeri a permanencia-elvet;
- tud exponenciális egyenleteket, egyenletrendszereket megoldani;
- tud egyszerű logaritmosos egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása a logaritmus azonosságai segítségével.

#### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Az n-edik gyök fogalmának ismerete és alkalmazása
- Hatványozás pozitív alap és racionális kitevő esetén
- A permanencia-elv ismerete
- Hatványozás azonosságainak alkalmazása racionális kitevő esetén
- A hatványozás szemléletes értelmezése irracionális kitevő esetén
- Exponenciális egyenleteket, egyenletrendszerek megoldása
- Az exponenciális függvények  $(x \mapsto a^x)$  ábrázolása hagyományosan és számítógéppel, a függvények tulajdonságai
- A logaritmus értelmezése
- Áttérés más alapú logaritmusra – ennek ismerete, bizonyítása és alkalmazása
- Számológép használata logaritmus értékének meghatározásához
- A logaritmus azonosságai – ismerje, bizonyítsa és alkalmazza
- A más alapú logaritmusra való áttérés szabályának ismerete és alkalmazása
- Ismerje, tudja ábrázolni és jellemezni az alábbi hozzárendeléssel megadott függvényeket:
  - $x \mapsto a^x$
  - $x \mapsto \log_a x$
- Egyszerű logaritmosos egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása



## FOGALMAK

$n$ -edik gyök, exponenciális függvény, logaritmus

## JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET

- A permanencia-elv gyakorlati „kipróbálása” a definíció megadása előtt
- Matematikatörténeti érdekességek (például déloszi probléma) feldolgozása projektmunkában
- Különböző alapú exponenciális függvények ábrázolása milliméterpapíron, és a kapott grafikonok összehasonlítása csoportmunkában
- Nagy számok számjegyei számának meghatározása logaritmus segítségével
- 10-estől eltérő alapú logaritmus kiszámolása csak 10-es alapú logaritmus kiszámolására alkalmas számológéppel
- Annak bemutatása, hogy a logaritmus segítségével hogyan lehet számok szorzását számok összeadására visszavezetni
- A logaritmus-táblázat és a logarléc mint matematikatörténeti érdekességek megismertetése
- Érdekességek a prímszámok eloszlásával kapcsolatban

## TÉMAKÖR: Exponenciális folyamatok vizsgálata

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 30 óra**

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
- ismeri és alkalmazza a logaritmus fogalmát.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló**

**a 11. évfolyam végére:**

- adott problémához megoldási stratégiát, algoritmust választ, készít;
- a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
- a kiválasztott modellben megoldja a problémát;
- a modellben kapott megoldását az eredeti problémába visszahelyettesítve értelmezi, ellenőrzi, és az észszerűségi szempontokat figyelembe véve adja meg válaszát;
- egyenletek megoldását behelyettesítéssel, értékkészlet-vizsgálattal ellenőrzi;
- megold exponenciális egyenleteket, egyenlőtlenségeket, egyenletrendszereket.

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Exponenciális folyamatok vizsgálata a természetben és a társadalomban
- Exponenciális egyenletre, egyenlőtlenségre vezető matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információk kigyűjtése, rendszerezése
- Adott problémához megoldási stratégia, algoritmus választása, készítése
- A gyakorlati (például pénzügyi, biológiai, fizikai, demográfiai, ökológiai) problémának megfelelő matematikai modell választása, alkotása
- A kiválasztott modellben a probléma megoldása
- A modellben kapott megoldás értelmezése az eredeti probléma szövegébe visszahelyettesítve, ellenőrzés és válaszadás az észszerűségi szempontokat figyelembe véve

## FOGALMAK

Nincsenek új fogalmak.

## JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET

- Tanulói kiselőadás az exponenciálisan változó folyamatokról a természetben és a társadalomban
- Adatgyűjtés különböző forrásokból származó, exponenciális vagy közelítőleg annak tekinthető változókra csoportmunkában
- Gyakorlati, időben exponenciálisnak tekinthető változást mutató grafikonokra exponenciális függvény illesztése digitális eszköz segítségével, és az illesztett függvény paramétereinek értelmezése

## TÉMAKÖR: **Sorozatok**

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 24 + 14 = 42 óra**

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri és alkalmazza a sorozat fogalmát.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló**

**a 11. évfolyam végére:**

- tud sorozatot jellemezni (korlátosság, monotonitás);
- ismeri a konvergencia szemléletes fogalmát, valamint ismeri és alkalmazza egyszerű sorozatokban a konvergens sorozat definícióját;
- alkalmazza egyszerű sorozatokban a konvergens sorozatok összegének, különbségének, szorzatának és hányadosának határértékére vonatkozó tételeket;
- megállapítja konvergens sorozatok véges és végtelen határértékét;
- ismeri az  $e$  definícióját, az  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  sorozatot.

**a 12. évfolyam végére:**

- számtani és mértani sorozatokat adott szabály alapján felír, folytat;
- a számtani/mértani sorozat  $n$ -edik tagját felírja az első tag és a különbség (differencia)/hányados (kvóciens) ismeretében;
- a számtani/mértani sorozatok első  $n$  tagjának összegét kiszámolja;
- ismeri és alkalmazza a százalékalap, -érték, -láb, -pont fogalmát;
- mértani sorozatokra vonatkozó ismereteit használja gazdasági, pénzügyi, természettudományi és társadalomtudományi problémák megoldásában;
- tudjon gyűjtőjárdékot és törlesztőrészletet számolni;
- ismeri és alkalmazza egyszerű feladatokban a végtelen mértani sor fogalmát, összegét.

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A számsorozat fogalmának ismerete
- Számsorozat megadása képlettel, rekurzióval
- Számtani és mértani sorozatok felírása, folytatása adott szabály szerint

- Számtani sorozat, az  $n$ -edik tag (levezetéssel), az első  $n$  tag összege
- Mértani sorozat, az  $n$ -edik tag (levezetéssel), az első  $n$  tag összege
- A számtani és a mértani sorozat első  $n$  tagjának összegére vonatkozó képlet bizonyítása
- Tizedestört alakban megadott racionális szám közösleges tört alakjának meghatározása
- Számtani és mértani sorozatokra vonatkozó ismeretek alkalmazása gazdasági, természettudományi és társadalomtudományi problémák megoldásában
- Megtakarítási és kamatozási formák, ezek összehasonlítása
- Egyszerű kamat, kamatos kamat, gyűjtőjárdék és törlesztőrészlet számítása
- Megtakarítási, befektetési és hitelfelvételi lehetőségekkel és azok kockázati tényezőivel kapcsolatos feladatok megoldása
- Sorozat jellemzése (korlátosság, monotonitás)
- A konvergencia szemléletes fogalma, valamint ismeri és alkalmazza egyszerű sorozatokban a konvergens sorozat definícióját.
- Alkalmazza egyszerű sorozatokban a konvergens sorozatok összegének, különbségének, szorzatának és hányadosának határértékére vonatkozó tételeket
- Ismerje és alkalmazza egyszerű feladatokban a végtelen mértani sor fogalmát, összegét.
- Az  $e$  definíciója, az  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  sorozat
- Az  $e$  irracionálisága

#### **FOGALMAK**

számsorozat, tőke, kamatláb, kamat, futamidő, gyűjtőjárdék, törlesztőrészlet,  $e$

#### **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET**

- Tanulói kiselőadás tartása nevezetes sorozatokról, például Fibonacci-sorozat
- Az első 100 pozitív természetes szám összegének meghatározása a „kis” Gauss módszerével
- A sakktáblára elhelyezett, mezőről mezőre kétszeres számú búzaszemek kérdésének bemutatása
- Valódi pénzügyi termékek kamatozási és egyéb feltételeinek összehasonlítása csoportmunkában internetes adatgyűjtés segítségével
- Másodrendű lineáris rekurziók

#### **TÉMAKÖR: Differenciál-számítás**

#### **JAVASOLT ÓRASZÁM: 40 óra**

#### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri függvények határértékének és folytonosságának fogalmát;
- teljes függvényvizsgálatot tud végezni a tanult függvények körében.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló**

**a 11. évfolyam végére:**

- ismeri a végesben vett véges, a végtelenben vett véges és a tágabb értelemben vett határérték szemléletes fogalmát;
- alkalmazza a differenciálszámítást érintő egyenletének felírására, szélsőérték-feladatok megoldására és polinomfüggvények vizsgálatára (monotonitás, szélsőérték, konvexitás);

- a tanult függvények körében meghatározza a derivált függvényt.

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Függvény folytonossága (példa sehol sem folytonos függvényre)
- Függvény határértéke (a „sorozatos” és a „környezetes” definíciók ekvivalenciája)
- Folytonos függvények, folytonossá tehető függvények (megszüntethető és nem megszüntethető szakadás)
- Összeg-, a különbség-, a konstansszoros, a szorzat- és a hányadosfüggvény deriválási szabályai, és ezek alkalmazása
- Összetett függvény deriválási szabályainak alkalmazása egyszerűbb esetekben
- Inverz függvény deriváltja
- Tudja bizonyítani, hogy  $(x^n)' = nx^{n-1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).
- Ismeri a trigonometrikus függvények deriváltját.
- Exponenciális és logaritmus függvény deriváltja
- L'Hospital szabály
- Deriválási szabályok ismerete: összeg-, konstansszoros, szorzat- és hányadosfüggvény, összetett függvény

### FOGALMAK

függvény határértéke végesben és végtelenben, folytonosság szemléletes fogalma, differencia- és differenciálhányados

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET

- Példák folytonos és nem folytonos függvényekre
- Korlátos és zárt intervallumon folytonos függvény tulajdonságai
- A határérték számítógépes becslése
- Bizonyítások nélkül, de ellenpéldák mutatásával azokra az esetekre, ha az intervallum nem korlátos, nem zárt, illetve, ha a függvény nem folytonos
- Darboux-tulajdonság, Bolzano tétele, Weierstrass tétele
- A deriválás használata görbéhez adott pontbeli érintő egyenletének meghatározására (bevezetesként is jó)
- A pillanatnyi sebesség meghatározása (bevezetesként)
- Példák nem differenciálható függvényekre
- A függvény tulajdonságai és a derivált kapcsolata
  - Lokális növekedés, fogyás – intervallumon monoton függvény
  - Szélsőérték – lokális szélsőérték, abszolút szélsőérték
  - A szükséges és az elégséges feltételek pontos megfogalmazása, alkalmazása
  - Középtértéktételek
  - Rolle- és Lagrange-tétel (szemléletes kép.)
- A második derivált és a konvexitás kapcsolatának részletes vizsgálata
- Gyakorlati jellegű szélsőérték-feladatok megoldása
- Fizika: harmonikus rezgőmozgás kitérése, sebessége, gyorsulása – ezek kapcsolata
- Fizika: fizikai tartalmú függvények (pl. út-idő, sebesség-idő) deriváltjainak jelentése

- Fizika: Fermat-elv, Snellius-Descartes törvény. Fizikai jellegű szélsőérték-problémák
- *Matematikatörténet*: Fermat, Cauchy, Weierstrass

## TÉMAKÖR: **Integrálszámítás**

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 26 óra**

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

#### **A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri a határozatlan és határozott integrál fogalmát.

#### **A témakör tanulása eredményeként a tanuló**

##### **a 12. évfolyam végére:**

- ismeri folytonos függvényekre a határozott integrál szemléletes fogalmát és tulajdonságait;
- ismeri a kétoldali közelítés módszerét, az integrálfüggvény fogalmát, a primitív függvény fogalmát, valamint a Newton-Leibniz-tételt;
- tudja polinomfüggvények, illetve a szinusz- és koszinuszfüggvény grafikonja alatti területet kiszámolni;
- a tanult függvényeket tudja integrálni.

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Határozatlan integrál
- Az integrálás technikája (parciális integrálás; helyettesítéssel való integrálás; parciális törtekre bontás)
- Alsó és felső közelítő összeg
- Az integrál mint a felső határ függvénye
- Newton-Leibniz formula
- Alkalmazás görbe alatti terület kiszámítására (előjeles terület is)

### FOGALMAK

alsó-felső közelítő összeg, határozott integrál, határozatlan integrál, az integrál mint a felső határ függvénye

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET

- Bevezető feladatok az integrál fogalmához (függvénygörbe alatti terület, a megtett út és a sebesség-idő grafikon alatti terület összefüggése)
- Közelítés véges összegekkel
- Az integrálszámítás alkalmazása ívhossz, forgástestek térfogatának és felszínének meghatározására
- Az integrálszámítás alkalmazása tehetetlenségi nyomaték, súlypont, megtett út meghatározására
- Parciális integrálás

- Helyettesítéses integrálás
- Példák nem integrálható függvényekre
- Számítógépes szoftver használata a határozott integrál szemléltetésére
- *Matematikatörténet*: Leibniz, Newton, Riemann

## TÉMAKÖR: **Trigonometria**

**JAVASOLT ÓRASZÁM:  $42 + 9 = 51$  óra**

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri és alkalmazza a szinusz- és a koszinusztételt.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló**

**a 11. évfolyam végére:**

- ismeri hegyesszögek szögfüggvényeinek definícióját a derékszögű háromszögben;
- ismeri tompaszögek szögfüggvényeinek származtatását a hegyesszögek szögfüggvényei alapján;
- ismeri a hegyes- és tompaszögek szögfüggvényeinek összefüggéseit;
- alkalmazza a szögfüggvényeket egyszerű geometriai számítási feladatokban;
- a szögfüggvény értékének ismeretében meghatározza a szöget;
- kiszámítja háromszögek területét;
- ismeri és alkalmazza speciális négyszögek tulajdonságait, területüket kiszámítja;
- átdarabolással kiszámítja sokszögek területét;
- alkalmazza ismereteit geometriai egyenlőtlenségek és szélsőérték-feladatok megoldásában.

**a 12. évfolyam végére:**

- ismeri és alkalmazza a neves/nevezetes egyenlőtlenségeket.

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Hegyesszög szinusza, koszinusza, tangense
- Számítások derékszögű háromszögekben szögfüggvények segítségével gyakorlati helyzetekben
- Tompaszög szinusza, koszinusza, tangense
- Összefüggések ismerete egy adott szög különböző szögfüggvényei között: pitagoraszai összefüggés, pótszögek és mellékszögek szögfüggvényei
- Szögfüggvény értékének ismeretében a szög meghatározása számológép segítségével
- Ismeri és tudja ábrázolni, jellemezni az alábbi hozzárendeléssel megadott függvényeket:
  - $x \mapsto \sin x$
  - $x \mapsto \cos x$
  - $x \mapsto \operatorname{tg} x$
- Háromszög területének kiszámítása két oldal és a közbezárt szög ismeretében

- Bizonyítsa a háromszög területének kiszámítására használt képleteket, továbbá ismerje és alkalmazza a  $t = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$  összefüggést (bizonyítással)
- Szinusz- és koszinusztétel ismerete és alkalmazása
- A szinusztétel bizonyítása
- Számítások négyszögekben, sokszögekben szögfüggvények segítségével
- A környezetben található tárgyak magasságának, pontok távolságának meghatározása mért adatokból számítva
- Négyszögek és szabályos sokszögek területének kiszámítása
- Nevezetes négyszögek és szabályos sokszögek területképleteinek bizonyítása
- Függvénytáblázat segítségével tudja alkalmazni egyszerű feladatokban az addíciós összefüggéseket ( $\sin(\alpha+\beta)$ ,  $\cos(\alpha+\beta)$ ,  $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ ,  $\sin 2\alpha$ ,  $\cos 2\alpha$ ,  $\operatorname{tg} 2\alpha$ ).
- Bizonyítja a koszinusztételt
- Definíciók és azonosságok közvetlen alkalmazását igénylő, és másodfokúra visszavezethető trigonometrikus egyenletek megoldása
- Egyszerű trigonometrikus egyenlőtlenségek megoldása
- Sugár-egyenlőtlenség, Erdős-Mordell egyenlőtlenség, izoperimetrikus tételek, skalárszorozattal igazolható geometriai egyenlőtlenségek
- Neves/nevezetes egyenlőtlenségek
  - Jensen-egyenlőtlenség
  - Nesbitt-egyenlőtlenség
  - (Schur-egyenlőtlenség)
  - Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség
  - (Titu lemma)
  - Rendezési tétel
  - A dualitás elve

#### **FOGALMAK**

szinusz, koszinusz, tangens, szinusztétel, koszinusztétel

#### **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET**

- Tanulói kiselőadás a trigonometrikus ismeretek hétköznapi életben, munkában való felhasználhatóságáról, például: lakberendezés, ácsmunka, GPS működése
- Az iskolában vagy annak környezetében kijelölt, tetszőleges háromszög, illetve négyszög alakú részek területének meghatározása csoportmunkában, távolságok és szögek mérése alapján
- Épület magasságának meghatározása a látószög és a távolságok mérésének segítségével csoportmunkában
- Interaktív digitális eszközök használata a valós számok halmazán értelmezett szögfüggvények szemléltetéséhez
- A szögfüggvények szerepének bemutatása a harmonikus rezgőmozgást jellemző mennyiségekben

### TÉMAKÖR: **Koordinátageometria**

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 34 óra**

## TANULÁSI EREDMÉNYEK

### A témakör tanulása eredményeként a tanuló

#### a 11. évfolyam végére:

- ismeri a vektorokkal kapcsolatos alapvető fogalmakat;
- ismer és alkalmaz egyszerű vektorműveleteket;
- alkalmazza a vektorokat feladatok megoldásában;
- megad pontot és vektort koordinátaival a derékszögű koordináta-rendszerben;
- koordináta-rendszerben ábrázol adott feltételeknek megfelelő ponthalmazokat;
- koordináták alapján számításokat végez szakaszokkal, vektorokkal;
- ismeri és alkalmazza az egyenes egyenletét;
- egyenesek egyenletéből következtet az egyenesek kölcsönös helyzetére;
- kiszámítja egyenesek metszéspontjainak koordinátáit az egyenesek egyenletének ismeretében;
- megadja és alkalmazza a kör egyenletét a kör sugarának és a középpont koordinátáinak ismeretében;
- felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot;
- ismerje a parabola fogalmát;
- ismeri és alkalmazza feladatokban a vektor  $90^\circ$ -os elforgatottjának koordinátáit, valamint a skalárszorzat kiszámítását vektorok koordinátáiból;
- bizonyítsa a skalárszorzat koordinátákból való kiszámítására vonatkozó tételt;
- tudja koordinátáikkal adott vektorok hajlásszögét meghatározni;
- tudja levezetni a kör egyenletét.

#### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A vektor, vektor abszolút értéke, nullvektor, ellentett vektor, helyvektor fogalmak ismerete, alkalmazása
- A vektorok összeadása, kivonása, szorzása valós számmal, műveletek ismerete és alkalmazása
- Vektorok alkalmazása feladatok megoldásában
- Pont és vektor megadása koordinátákkal a derékszögű koordináta-rendszerben
- Adott feltételeknek megfelelő ponthalmazok ábrázolása koordináta-rendszerben
- Két pont távolságának, vektor abszolút értékének meghatározása koordináták alapján
- Vektorok összegének, különbségének, számszorosának koordinátái
- Szakaszelezőpont koordinátáinak meghatározása a végpontok koordinátái alapján
- Igazolja a szakasz felezőpontja és harmadoló pontjai koordinátáinak kiszámítására vonatkozó összefüggéseket
- Igazolja és alkalmazza a háromszög súlypontjának koordinátáira vonatkozó összefüggést
- Egyenes egyenlete  $y = mx + b$  vagy  $x = c$  alakban
- Egyenes meredekségének fogalma; egyenesek merőlegességének és párhuzamosságának megállapítása a meredekségek alapján
- Ismeri egyenesek párhuzamosságának és merőlegességének koordinátageometriai feltételeit
- Tudja síkbeli egyenesek hajlásszögét meghatározni
- Tudja többféle alakban felírni és levezetni az egyenes egyenletét a síkban különböző kiindulási adatokból
- Az egyenesek egyenletének ismeretében egyenesek metszéspontjának koordinátái



- A kör egyenletének megadása és alkalmazása a kör sugarának és a középpont koordinátáinak ismeretében
- Vektorok skaláris szorzata definíciójának, tulajdonságainak ismerete és alkalmazása
- Tudja koordinátáikkal adott vektorok hajlásszögét meghatározni
- Az egyenes egyenletének irányvektoros és normálvektoros alakja
- Kör és egyenes kölcsönös helyzetének meghatározása
- Kör adott pontjába húzható érintő egyenletének felírása
- Ismerje a kör és a kétismeretlenes másodfokú egyenlet kapcsolatát
- Tudja meghatározni kétismeretlenes másodfokú egyenletből a kör középpontját és sugarát
- Tudja meghatározni kör és egyenes metszéspontját
- Tudja felírni a kör adott pontjában húzott érintő egyenletét
- Tudja meghatározni két kör kölcsönös helyzetét, metszéspontjait
- Tudja levezetni a parabola  $x^2=2py$  alakú egyenletét
- Tudjon feladatokat megoldani az y tengellyel párhuzamos tengelyű parabolákkal
- Ismeri az ellipszis és a hiperbola fogalmát, egyenletét
- Gömb egyenlete
- Sík egyenletének Hesse-féle normálalakja
- A rácsgeometria elemei (Paralelogramma rács, háromszögrács, üres rácsháromszög, Pick tétel)

#### **FOGALMAK**

vektor, vektor abszolút értéke, nullvektor, ellentett vektor, helyvektor, vektorok összege, vektorok különbsége, vektor számszorosa, vektor koordinátái, alakzat egyenlete, egyenes egyenlete, kör egyenlete; irányvektor, normálvektor, skaláris szorzat

#### **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET**

- „Torpedójáték” koordináta-rendszerben
- Helymeghatározás térképen a szélességi és hosszúsági adatok segítségével
- Ház/lakás alaprajzának elkészítése koordináta-rendszerben, az eredeti adatok alapján
- Játék helyvektorokkal dinamikus geometriai szoftver használatával
- Gondolattérkép készítése a koordinátagometria kapcsolatainak bemutatására csoportos vagy egyéni munkaformában
- „Oroszlánfogás”: lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldása grafikusan, digitális eszköz segítségével
- „Célba lövés”: játék körökkel a koordináta-rendszerben
- Hétköznapi helyzetek, mozgások, tervrajzok modellezése koordináta-geometriai eszközökkel
- A skaláris szorzat előfordulásának megmutatása fizikai mennyiségeknél
- Dandelin-gömb
- Egyenesek és síkok hajlásszögének számítása

### **TÉMAKÖR: Térgeometria**

**JAVASOLT ÓRASZÁM: 40 óra**

## TANULÁSI EREDMÉNYEK

### A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri és alkalmazza a szinusz- és a koszinusztételt.

### A témakör tanulása eredményeként a tanuló

#### a 12. évfolyam végére:

- ismeri és feladatmegoldásban alkalmazza a térelemek kölcsönös helyzetét, távolságát és hajlásszögét;
- ismeri a mérés alapelvét, alkalmazza konkrét alap- és származtatott mennyiségek esetén;
- ismeri a hosszúság, terület, térfogat, űrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
- sík- és térgeometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben adja meg választ;
- ismeri és alkalmazza a hasáb, a henger, a gúla, a kúp, a gömb, a csonkagúla, a csonkakúp (speciális testek) tulajdonságait;
- lerajzolja a kocka, téglatest, egyenes hasáb, egyenes körhenger, egyenes gúla, forgáskúp hálóját;
- kiszámítja a speciális testek felszínét és térfogatát egyszerű esetekben;
- ismeri és alkalmazza a hasonló testek felszínének és térfogatának arányára vonatkozó tételeket;
- tudja kitérő egyenesek távolságát és hajlásszögét meghatározni;
- bizonyítja a csonkagúla és csonkakúp térfogatképletét.

## FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Térelemek kölcsönös helyzetének, távolságának és hajlásszögének ismerete, alkalmazása feladatmegoldásban
- A terület, térfogat, űrtartalom mértékegységeinek és ezek átváltási szabályainak ismerete
- Sűrűség mértékegységei közötti átváltás ismerete
- Sík- és térgeometriai feladatoknál a válasz megadása a problémának megfelelő mértékegységben
- A hasáb, a henger, a gúla, a kúp, a gömb, a csonkagúla, a csonkakúp (speciális testek) tulajdonságainak ismerete és alkalmazása a hétköznapi életben előforduló testekkel kapcsolatban
- A kocka, a téglatest, az egyenes hasáb, az egyenes körhenger, az egyenes gúla és a forgáskúp hálójának lerajzolása konkrét esetekben
- A mindennapi életben előforduló hasáb, henger, gúla, kúp, gömb, csonkagúla, csonkakúp alakú tárgyak felszínének és térfogatának meghatározása méréssel és számítással
- Síkidomok forgatásával keletkező egyszerű, a mindennapi életben is előforduló testek felszínének és térfogatának kiszámítása
- A hasonló síkidomok kerületének és területének arányára vonatkozó tételek ismerete és alkalmazása
- A hasonló testek felszínének és térfogatának arányára vonatkozó tételek ismerete és alkalmazása

## FOGALMAK

kocka, téglatest, hasáb, henger, gúla, kúp, gömb, csonkagúla, csonkakúp, egyenes test, forgástest, n-oldalú szabályos gúla, tetraéder, alaplap, oldallap, alapél, oldalél, alkotó, palást, testmagasság, test hálója

#### **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET**

- Hétköznapi tárgyak (üdítősdoboz, vizesflakon, tejfölösdoboz stb.) térfogatának megállapítása méréssel, a kapott eredmény összehasonlítása a tárgyon szereplő értékkel
- A Louvre bejárataként épített üvegpiramis földfelszín feletti térfogatának és az üvegfelület felszínének meghatározása (szükséges adatok gyűjtése az internetről)
- Annak becslése csoportmunkában, hogy a teret milyen arányban tudjuk kitölteni egybevágó érintkező gömbökkel különböző elrendezések esetén
- Különböző méretű, megközelítőleg gömb alakú gyümölcsök térfogatának és felszínének becslése, a becslés ellenőrzése méréssel
- A Föld felszínének és térfogatának közelítése földgömbmodellen méréssel és számolással, majd a kapott értékek összevetése a hivatalos adatokkal
- Projektmunka a gömbről: hogyan jelenik meg a gömb a mindennapi életben, a többi tantárgyban és a matematikában; a gömbi geometria alapjai

### **TÉMAKÖR: Leíró statisztika**

#### **JAVASOLT ÓRASZÁM: 10 óra**

#### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

#### **A témakör tanulása eredményeként a tanuló**

#### **a 12. évfolyam végére:**

- adott cél érdekében tudatos adatgyűjtést és rendszerezést végez;
- hagyományos és digitális forrásból származó adatsokaság alapvető statisztikai jellemzőit meghatározza, értelmezi és értékeli;
- ismeri és alkalmazza a sodrófa (box-plot) diagramot adathalmazok jellemzésére, összehasonlítására;
- felismer grafikus manipulációkat diagramok esetén.

#### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- A reprezentatív minta fogalmának szemléletes ismerete
- Hétköznapi, társadalmi problémákhoz kapcsolódó statisztikai adatok tervszerű gyűjtése
- Statisztikai adatok rendszerezése, jellemzése kvartilisekkel, középpértékekkel és szóródási mutatókkal
- Sodrófa (box-plot) diagram készítése, alkalmazása
- Adathalmazok összehasonlítása sodrófa-diagramok alapján
- A kapott adatok értelmezése, értékelése, statisztikai következtetések
- A következő fogalmak ismerete és alkalmazása: súlyozott számtani közép, átlagos abszolút eltérés
- Tudjon választani az adathalmazt jól jellemző középpértéket, és tudjon a választása mellett érvelni
- Tudjon statisztikai adatokat értelmezni, értékelni, azokból tudjon statisztikai következtetéseket levonni

- Nagy adathalmazok kezelése táblázatkezelő programmal
- Grafikus és szöveges statisztikai manipulációk felismerése
- Hisztogram

#### **FOGALMAK**

reprezentatív minta, sodrófa (box-plot) diagram, minimum, maximum, kiugró adat, kvartilisek, terjedelem, szórás

#### **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET**

- Példák reprezentatív és nem reprezentatív mintavételre
- Szavazások szimulálása és különböző szavazatértékelő rendszerek vizsgálata iskolai körülmények között
- A Simpson-paradoxon bemutatása példákon
- Az interneten található, megbízható forrásból (pl. KSH honlapja) származó statisztikák értelmezése, elemzése, lehetséges következtetések megfogalmazása
- Különböző forrásokból származó adathalmazok statisztikai elemzése, értékelése, ezekből valamilyen adott szempont alapján manipulatív és nem manipulatív diagram készítése

### **TÉMAKÖR: Valószínűség-számítás**

#### **JAVASOLT ÓRASZÁM: 31 óra**

#### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

##### **A témakör tanulása eredményeként a tanuló**

##### **a 12. évfolyam végére:**

- konkrét valószínűségi kísérletek esetében az esemény, eseménytér, elemi esemény, relatív gyakoriság, valószínűség, egymást kizáró események, független események fogalmát megkülönbözteti és alkalmazza;
- ismeri és alkalmazza a klasszikus valószínűségi modellt és a Laplace-képletet;
- ismeri és egyszerű esetekben alkalmazza a valószínűség geometriai modelljét;
- meghatározza a valószínűséget visszatevéses, illetve visszatevés nélküli mintavétel esetén.

#### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Példák ismerete események összegére, szorzatára, komplementer eseményre, egymást kizáró eseményekre
- Elemi események fogalmának ismerete, alkalmazása események előállítására
- Példák ismerete független és nem független eseményekre
- A klasszikus valószínűségi modell és a Laplace-képlet ismerete, alkalmazása
- A geometriai valószínűség fogalmának ismerete és alkalmazása
- Valószínűségek meghatározása visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel esetén
- Definiálja és alkalmazza a középszinten felsorolt fogalmakat
- Definiálja és alkalmazza a feltételes valószínűség fogalmát
- Tudja értelmezni a binomiális eloszlást (visszatevéses modell) és a hipergeometriai eloszlást (visszatevés nélküli modell). Tudjon ezek alkalmazásával konkrét valószínűségeket kiszámítani.
- Geometriai eloszlás
- Teljes valószínűség tétele
- Bayes-tétel

- A nagy számok törvénye
- A várható érték ismerete és meghatározása konkrét feladatokban, játékokban
- Pénzügyi fogalmakkal kapcsolatos valószínűségi ismeretek (például biztosítás, befektetések kockázata, árfolyamkockázat)

### **FOGALMAK**

események összege, események szorzata, esemény komplementere, egymást kizáró események, független események, geometriai valószínűség, visszatevéses mintavétel, visszatevés nélküli mintavétel, várható érték

### **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK, KAPCSOLÓDÁSI PONTOK, MATEMATIKATÖRTÉNET**

- Konkrét valószínűségi kísérletek végrehajtása vagy dinamikus szoftver segítségével történő szimulálása (pl. szabályos dobókockákkal, pénzérmével dobálás); a kapott gyakoriságok és relatív gyakoriságok táblázatba foglalása; becslés az egyes kimenetek, illetve összetett események valószínűségére csoportmunkában
- Példák keresése független és nem független, illetve egymást kizáró eseményekre csoportmunkában
- Orvosi tesztek eredményének esélyelemzése fagráf segítségével
- Egyszerű valószínűségi játékokhoz kapcsolódóan a várható nyeremény és az igazságosság fogalmának kialakítása
- Konkrét bank konkrét befektetési portfóliójának értelmezése, elemzése
- Néhány konkrét biztosítási ajánlat értelmezése, elemzése
- Markov-egyenlőtlenség, Csebisev-egyenlőtlenség