

Matematika – Speciális matematika tagozat

7–12. évfolyam

A speciális matematika tagozat kerettanterve tartalmazza a Nemzeti Alaptanterv (a továbbiakban: Nat) alapján a hat évfolyamos gimnáziumok számára készített matematika kerettanterv anyagát (aláhúzás nélkül) továbbá a speciális matematika tagozat anyagát (aláhúzva). A speciális matematika kerettanterve a hat évfolyamos gimnáziumi matematika kerettantervet egészíti ki, a tantárgyi tartalom nagy arányban tartalmaz az emelt szintű érettségi vizsga vizsgakövetelményein túlmutató témákat, ismereteket is.

A hat évfolyamos gimnáziumi képzésben a matematika tanulása-tanítása során a tudástartalmak fokozatosan válnak egyre elvontabbá. A konkrét tárgyi tevékenységekből indulva a képi szemléltetések, ábrázolások mellett egyre inkább megjelennek a szimbolikus modellek. A tanuló a fogalmak, jelenségek elemzése útján eljut azok megértésen alapuló meghatározásához, a definíciók előkészítése során tulajdonságokat, sejtéseket fogalmaz meg, s kialakul a megoldást alátámasztó indoklás igénye. Felismeri a matematika kisebb egységeinek belső struktúráját.

A 7–8. évfolyamon a tanítás fő módszere a felfedeztetés, a konkrét tevékenységből, játékból, hétköznapi szituációból fakadó indukció. A tanuló konkrét helyzetek megoldására modelleket, stratégiákat alkalmaz és alkot, ezáltal fejlődik problémamegoldó és problémaalkotó képessége.

A 9. évfolyamtól kezdődően hangsúlyosabbá válik a tanuló önálló, rendszerezett, logikus gondolkodásának fejlesztése. A spirális felépítésnek megfelelően – a korábbi képzési szakaszok során megszerzett készségekre, képességekre és ismeretekre alapozva – egyre absztraktabb formában épül fel a matematika belső struktúrája (fogalmak definíciója, tételek, bizonyítások).

Jól megválasztott problémák tárgyalása során válik a tanulók számára is szükségessé az új fogalmak bevezetése és pontos definiálása. Tanári irányítással a tételek, általános összefüggések is felfedeztethetők. Ezen folyamat során fejlődik a tanulók szintetizáló és modellalkotó képessége. A felfedezett tételek és összefüggések egy része bizonyítás nélkül is gyarapítja a matematikai eszköztárat. A bizonyítások, indoklások önálló felfedezése fejleszti a tanulók érvelési képességét, mérlegelő gondolkodását. Néhány tétel bizonyítása elengedhetetlen része a matematika tanításának, hiszen a bizonyításokon keresztül mutatható meg a matematika logikus és következetes felépítése.

A matematikai játékok, logikai feladványok fejlesztik a stratégiaalkotást, az algoritmikus gondolkodást, a kreativitást és a gondolkodás rugalmasságát. A kombinatív képességek területén a lehetőségek strukturált felsorolásából fokozatosan kialakulnak a rendszerezést segítő konkrét eszközök, stratégiák alkalmazásának készségei.

A matematika a maga hagyományos és modern eszközeivel segítséget ad a természettudományok, az informatika, a technika és a humán tanulási területek ismeretanyagának tanulmányozásához, a mindennapi problémák, a természeti és a gazdasági folyamatok értelmezéséhez és kezeléséhez. A tanulók megtapasztalják a matematika alkalmazhatóságát, hasznosságát.

A tanuló társaival közösen tervez és hajt végre kooperatív tevékenységeket, projekteket. A közös munkában érvel, képes a vitára, az érvei ütköztetésére. Mérlegeli és kontrollálja mind a társai, mind a saját véleményét.

Az új fogalmak, magasabb szintű absztrakciót igénylő tudástartalmak bevezetésekor az egyéni adottságokhoz, ismeretekhez alkalmazkodó differenciálás biztosítja a megfelelő tempójú haladást annak a tanulóknak, akinél ezek a lépések hosszabb időt, több szemléltetést igényelnek. Ezzel a lassabban haladó tanuló sem veszíti el érdeklődését a matematika iránt.

A tanuló digitális eszközöket, a tanulást, a szemléltetést, a tapasztalatszerzést és a felfedezést segítő szoftvereket, digitális információforrásokat használ, a matematika alkalmazását segítő számítógépes programokat ismer meg. Aktív résztvevője a tanulási-tanítási folyamatnak, ami lehetővé teszi azon kompetenciáinak és tervezési stratégiáinak a fejlődését, amelyek segítik a mai gyorsan változó világban való eligazodást és a különböző élethelyzetekben előforduló problémák megoldását.

I. A speciális matematika tagozat tantervi koncepciója

Az 50 éve eredményesen (az első 30 évben négy évfolyamos, az utóbbi húsz évben már hat évfolyamos formában is) működő speciális matematika tagozatok tantervének átalakítása két okból indokolt. Az egyik: a matematikatudomány és a természettudományok fejlődése során felmerülő új problémák beemelése a köznevelésbe. A másik: az új (elsősorban digitális) eszközök alkalmazásának beépítése a tanítás-tanulás folyamatába.

A speciális matematika tagozatos tanterve több cél együttes megvalósulásának szem előtt tartásával készült.

Tartalom:

Egyrészt, a matematika történeti fejlődésének, ezzel együtt nyitottságának bemutatása abból a célból, hogy a tanulók egy-egy probléma megoldása során bátran alkalmazzák a tanult eszközöket, képesek legyenek új összefüggések felismerésére, nyitottak legyenek az új, általuk ismeretlen eszközök és módszerek befogadására. Középiskolai tanulmányaik befejeztével motiváltak legyenek a tanultak széleskörű alkalmazására, a megoldatlan problémák megoldásának kutatására. Másrészt cél a matematika „különálló” részterületei (pl. algebra, számelmélet, geometria, analízis) közötti belső összefüggések felismertetése, azok egységben kezelése, valamint a természettudományok matematikai alapjainak tudatosítása, elsajátíttatása.

A speciális matematika tagozaton – a fő célok megvalósítása érdekében – elengedhetetlen a definíciók pontos ismerete, a tételek bizonyítása, az ehhez szükséges módszerek elsajátíttatása.

Módszerek:

A speciális matematika tagozaton tanító tanároknak éppúgy, mint a köznevelés bármely más területén dolgozóknak mindenképp az életkori sajátosságok szem előtt tartása a módszertani

alapelvük. A középiskolai tanulmányok hat éve alatt minden évben annyit és csak annyit szabad megtanítani, amennyit a tanuló teljes mértékben meg tud érteni, be tud építeni a gondolkodásába. A matematikatanítás célja az alkotó gondolkodásra nevelés. El kell érni, hogy a tanulók meg tudják fogalmazni kérdéseiket, a felvetődött problémákra adott válaszaikat, képesek legyenek gondolataikból és a tanult ismeretekből tiszta, pontos logikai láncot alkotva bizonyítani, cáfolni, új problémákat felvetni. A rendelkezésre álló időkeret meghatározó hányadát a gyakorlás, az alkalmazás kell, hogy kitöltse.

A speciális matematika tagozat egyik megkülönböztető erénye más matematikatanítási formákkal szemben a tanórákra tervezett, közösségben, azaz osztály/csoportkeretben történő tehetséggondozás. A tanulókat képessé kell tenni arra, hogy társaiktól tanuljanak, társaikkal együttműködve sokszorozzák meg tudásukat, a tanórák minden perce értékes, építő, gazdagító munkával teljen, valamennyi tanuló számára; a differenciált feladatkitűzés és a különféle munkaformák optimális arányainak megválasztásával.

A türelem, az együttműködés, „a szakmai vita”, ezzel a tévedés jogának biztosítása, az elmélyült önálló tevékenység és a közös munka optimális arányának megtalálása a legfontosabb módszertani elemek.

Eszközök:

A speciális matematika tagozaton a hagyományos eszközök (tankönyvek, példatárak) továbbra is meghatározó jelentőséggel bírnak. A digitális eszközök elsősorban segédeszközök, amelyek a szemléltetést segítik és kibővítik az ismeretek alkalmazásának körét. Az eszközök használatának magas szintű ismerete szükséges. Öncélú alkalmazásuk a tanítás folyamatában a speciális matematika tagozaton kontraproduktív lehet. (Elvonhatja a figyelmet a problémafelismeréstől, félrevezetheti a tanulót a gondolkodási folyamat hosszát és lépéseit illetően.) Másrészt viszont a modern matematikatanításnak nélkülözhetetlen eszközei, amelyek nélkül az alkalmazásképes tudás és a későbbi alkotómunka elképzelhetetlen. A tanár feladata a helyes arányok megtalálása.

A 7-12. évfolyamon a matematika tantárgy Nat-ban meghatározott heti kötelező alapóraszámát átlagosan három. A speciális matematika tagozaton további heti három tanórát ajánlott a tantárgy tanítására fordítani (az alapóraszám felül heti két órát emelt matematikaoktatás keretében lehetne biztosítani, jelen kerettanterv ezen túlmutat).

7–8. évfolyam

A 7–8. évfolyamon a korábbinál nagyobb hangsúlyt kap az elvonatkoztatás és az absztrakció képességének fejlesztése, miközben továbbra is megmarad a szemléltetés és az eszközök használata. Elvárható a tapasztalatok általános megfogalmazása, a mindennapi életből vett szöveges problémák matematikai szempontú értelmezése, a megsejtett összefüggések indoklásának igénye és a tanult matematikai fogalmakat megnevező szakkifejezések helyes használata. Fejlődik a vitatkozás és az érvelés kultúrája az osztálytársakkal és a szaktanárral.

A 7–8. évfolyamon továbbra is tematikus elrendezésben követik egymást az egyes fejezetek: *Halmazok, számhalmazok; Matematikai logika, kombinatorika, gráfok; Számelméleti ismeretek, hatvány, négyzetgyök; Arányosság, százalékszámítás; Szöveges feladatok előkészítése; Szöveges feladatok; A függvény fogalmának előkészítése, Síkbeli alakzatok; Transzformációk, szerkesztések; Térgeometria; Leíró statisztika; Valószínűségszámítás.* Az egyes területek ismeretanyaga jelen van más témakörökben is, folyamatosan gazdagítva a szakmai eszköztárat. A szöveggel megfogalmazott hétköznapi és matematikai problémák megoldása tervek, vázlatok alapján, általánosabb eljárási módokat, gyakran algoritmusokat alkalmazva történik.

Az ismeretek bővülésével lehetővé válik a más tantárgyakhoz való kapcsolódás, a kitekintés lehetősége, a témák rendszerezése, több területen való megjelenése. A nevelési-oktatási szakasz során egyre komplexebbé válik a szemléletmód.

A szemléltetést, a megértést, az órai vagy házi feladatok megoldását és a gondolatmenet bemutatását a tanulók által használható digitális eszközök, szoftverek és online felületek is támogatják.

A speciális matematika tagozat lehetőséget nyújt arra, hogy pozitív motivációval hozzásegítsünk minden tanulót a matematikai gondolkodás örömeinek megismeréséhez. Tizenhárom éves kortól a tanulók mindinkább általánosító elképzelésekben, elvont konstrukciókban gondolkoznak. Elméleteket gyártanak, összefüggéseket keresnek, próbálják értelmezni a világot. Az iskolai tanítás csak akkor lehet eredményes, ha alkalmazkodik ezekhez a változásokhoz, illetve igyekszik azokat felhasználva fejleszteni a tanulókat. A matematika kiválóan alkalmas arra, hogy a rendszerező képességet és hajlamot fejlessze. Ezen a két évfolyamon mindinkább szükséges matematikai szövegeket értelmezni és alkotni. Segítsük, hogy a tanulók a problémamegoldásaik részeként többféle forrásból legyenek képesek ismereteket szerezni.

Ebben a korban a tanításban már meg kell jelennie az elvonatkoztatás és az absztrakciós készség felhasználásának, fejlesztésének. A matematika tanításában itt jelenik meg a konkrét számok betűkkel való helyettesítése, a tapasztalatok általános megfogalmazása. Ezekben az évfolyamokban már komoly hangsúlyt kell helyezni arra, hogy a megsejtett összefüggések bizonyításának igénye is kialakuljon. A definíciókat és a tételeket mindinkább meg kell tudni különböztetni, azokat helyesen kimondani, problémamegoldásban mind többször alkalmazni. A mindennapi élet és a matematika (korosztálynak megfelelő) állításainak igaz vagy hamis voltát el kell tudni dönteni. A feladatok megoldása során fokozatosan kialakul az adatok, feltételek adott feladat megoldásához való szükségessége és elégségessége eldöntésének képessége. A tanítás része, hogy a feladatmegoldás előtt mind gyakrabban tervek, vázlatok készüljenek, majd ezek közül válasszuk ki a legjobbat. Esetenként járunk be több utat a megoldás során, és ennek alapján gondoljuk végig, hogy létezik-e legjobb út, vagy ennek eldöntése csak bizonyos szempontok rögzítése esetén lehetséges. A feladatmegoldások során lehetőséget kell teremteni arra, hogy esetenként a terveket és a munka szervezését a feladatmegoldás közben a tapasztalatoknak megfelelően módosítani lehessen. Egyes feladatok esetén szükséges általánosabb eljárási módokat, algoritmusokat keresni.

A matematika egyes területei más-más módon adnak lehetőséget ebben az életkorban az egyes kompetenciák fejlesztésére. A különböző matematikatanítási módszerek minden tananyagrészen segíthetik a megfelelő önismeret, a helyes énkép kialakítását.

A tananyaghoz kapcsolódó matematikatörténeti érdekességek hozzásegítenek az egyetemes kultúra, a magyar tudománytörténet megismeréséhez. A gyakorlati élethez kapcsolódó szöveges feladatok segítik a gazdasági nevelést, a környezettudatos életvitelt, az egészséges életmód kialakítását. A definíciók megtanulása fejleszti a memóriát, a szaknyelv precíz használatára ösztönöz. A geometriai ismeretek elsajátítása közben a tanulók térszemlélete fejlődik, megtanulják az esztétikus, pontos munkavégzést. A halmazszemlélet alakítása és fejlesztése a rendszerező-képességet erősíti. Az egyes tematikus egységekre javasolt óraszámokat a táblázatok tartalmazzák.

A 7–8. évfolyamon a matematika tantárgy javasolt óraszám: 408 óra. Az egyes témakörökhöz írt óraszámok javaslatok. Az új ismeretek a teljes óraszám négyötöd része alatt a legtöbb tanuló számára elsajátíthatók, így a fennmaradó órák felhasználhatók a tanult ismeretek mélyítésére, ismétlésre, gyakorlásra, felzárkóztatásra, tehetséggondozásra és számonkérésre. 124

A témakörök áttekintő táblázata:

Témakör neve	Javasolt óraszám	7.évf.	8. évf.
Halmazok, számhalmazok	<u>24</u>	16	8
Matematikai logika, kombinatorika, gráfok, <u>algoritmusok</u>	<u>70</u>	40	30
Számelméleti ismeretek, hatvány, négyzetgyök	<u>45</u>	25	20
Arányosság, százalékszámítás	<u>20</u>	15	5
Szöveges feladatok előkészítése	<u>25</u>	18	7
Szöveges feladatok	<u>25</u>	10	15
A függvény fogalmának előkészítése	<u>50</u>	20	30
Síkbeli alakzatok	<u>45</u>	27	18
Transzformációk, szerkesztések	<u>40</u>	20	20
Térgeometria	<u>27</u>	13	14
Leíró statisztika	<u>15</u>	0	15
Valószínűségszámítás	<u>22</u>	0	22
Összes óraszám:	<u>408</u>	204	204

TÉMAKÖR: Halmazok, számhalmazok

JAVASOLT ÓRASZÁM: 24 óra (16+8 óra)

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

7. évfolyam végére

- elemeket halmazba rendez több szempont alapján;
- részhalmazokat konkrét esetekben felismer és ábrázol;
- számokat, számhalmazokat, halmazműveleti eredményeket (metszet, unió) számegyenesen ábrázol;
- véges halmazok közös részét (metszetét), egyesítését (unióját) képezi és ábrázolja konkrét esetekben;
- ismeri a racionális számokat;
- különbséget tud tenni egy számhalmaz esetén maximum és felső becslés (ill. minimum és alsó becslés) fogalma között;

8. évfolyam végére

- halmazműveleti eredményeket (különbség, komplementer) számegyenesen ábrázol;
- véges halmaz kiegészítő halmazát (komplementerét) képezi és ábrázolja konkrét esetekben;
- ismeri a racionális számokat, tud példát végtelen nem szakaszos tizedes törtre;
- tud változatos példákat végtelen halmazra, közte olyan számhalmazokkal, amelyek a minimális és maximális elemek közül csak az egyikkel, mindegyikkel, illetve egyikkel sem rendelkezik.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK 7. ÉVFOLYAMON

- Halmazokba rendezés több szempont szerint
- Halmazábra készítése
- Számok, számhalmazok, halmazműveleti eredmények szemléltetése számegyenesen
- Részhalmazok felismerése és ábrázolása konkrét esetekben
- Véges halmazok metszetének és uniójának megállapítása ábrázolás segítségével konkrét esetekben
- Természetes számok, egész számok, racionális számok halmazának ismerete, halmazábrájuk elkészítése
- Véges és végtelen szakaszos tizedes törtek ismerete
- Intervallumok szemléltetése számegyenesen
- Részhalmazok számának meghatározása konkrét esetekben
- A szita-formula a legegyszerűbb esetekben (2 halmazra)

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK 8. ÉVFOLYAMON

- Példa végtelen nem szakaszos tizedes törtre
- A szita-formula a legegyszerűbb esetekben (3 halmazra)
- Véges halmazok különbségének megállapítása ábrázolás segítségével konkrét esetekben
- Véges halmaz kiegészítő halmazának (komplementerének) megállapítása ábrázolás segítségével konkrét esetekben

- Számok, számhalmazok, halmazműveleti eredmények szemléltetése számegyenesen

FOGALMAK

kiegészítő halmaz (komplementer), metszet, unió, természetes szám, egész szám, racionális szám, véges, végtelen szakaszos és végtelen nem szakaszos tizedes tört alaphalmaz, halmazok különbsége, intervallum

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Konkrét elemek válogatása több adott tulajdonság szerint
- Egy konkrét válogatás szempontjainak felfedeztetése
- Konkrét halmaz elemeiből 1, 2, ... elemű részhalmazok képzése
- Legfeljebb 4 elemű halmaz esetén az összes részhalmaz előállítás
- Példák és ellenpéldák mutatása részhalmazra, például $A = \{\text{paralelogrammák}\}$ halmaz részhalmaza $B = \{\text{rombuszok}\}$, nem részhalmaza $C = \{\text{deltoidok}\}$
- Konkrét elemek szétválogatása adott tulajdonság és a tagadása szerint, például az osztály tanulói közül az iskolától legfeljebb 1 km-re élők és a távolabb lakók
- Konkrét elemek két-három tulajdonság szerinti válogatása során a mindegyik tulajdonsággal rendelkező elemek, a pontosan egy tulajdonsággal, a pontosan két tulajdonsággal és az egyetlen tulajdonsággal sem rendelkező elemek elhelyezése a halmazábrán
- A legalább egy tulajdonsággal rendelkező elemek felsorolása
- Logikai szita megtagasztalása, például 5 piros meg 4 kör összesen 7 elem a logikai készletből
- Csoportmunkában különböző közönséges törtek átírása úgy, hogy minden lehetséges tizedes tört típus alakja előforduljon; a tapasztalatok megbeszélése, irányított összegzése
- Játék makró jellegű kártyával: törtek különböző alakjainak keresése
- Számhalmazok megjelenítése relációkkal, intervallum jelöléssel és számegyenesen
- Legfeljebb 4 elemű halmaz esetén az összes részhalmaz számának meghatározása; kitekintés az általánosítás felé
- Konkrét elemek két-három tulajdonság szerinti válogatása során a pontosan egy tulajdonsággal rendelkező elemek és a különbség művelet kapcsolatának bemutatása a halmazábrán

TÉMAKÖR: Matematikai logika, kombinatorika, gráfok, algoritmusok

JAVASOLT ÓRASZÁM: 70 óra (40+30 óra)

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

7. évfolyam végén

- igaz és hamis állításokat fogalmaz meg;
- tanult minták alapján néhány lépésből álló bizonyítási gondolatsort megért és önállóan összeállít;
- összeszámlálási feladatok megoldása során alkalmazza az összes eset áttekintéséhez szükséges módszereket;
- lehetetlenséget bizonyít a páros/páratlan gondolat segítségével;

- egyszerű keresési feladatokat old meg algoritmusok segítségével (pl. n elemű halmazból adott szám kiválasztása a lehető legkevesebb kérdéssel);

8. évfolyam végén

- a logikus érvelésben a matematikai szaknyelvet következetesen alkalmazza társai meggyőzésére;
- konkrét szituációkat szemléltet gráfok segítségével;
- tudatos leszámplálási stratégiákat alkalmaz (pl. az eseteket ábrázolja fagráf segítségével);
- a skatulyaelv egyszerű változatait tudja alkalmazni kombinatorikai és gráfelméleti feladatokban;
- felismer máshogy lerajzolt, de izomorf gráfokat.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK 7. ÉVFOLYAMON

- Igaz és hamis állítások felismerése, önálló megfogalmazása
- A matematikai logika egyszerű, a korosztály számára érthető szakkifejezéseinek ismerete és használata
- Egyszerű stratégiai és logikai játékok
- Konkrét helyzethez kötött sorba rendezési problémák megoldása kör mentén is
- Konkrét helyzethez kötött kiválasztási problémák megoldása a sorrend figyelembevételével és anélkül
- Az összes eset összeszámplálása során rendszerezési sémák használata: táblázat, ágrajz, szisztematikus felsorolás
- Sokszög átlóinak száma
- n egyenes hány részre osztja a síkot
- n elemű rendezett halmaz legkisebb, legnagyobb elemének kiválasztása $n-1$ kérdéssel

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK 8. ÉVFOLYAMON

- Gráfok alkalmazása konkrét szituációk szemléltetésére
- A "minden" és "van olyan" kvantorok használata rövidítésként
- A teljes indukciót előkészítő feladatok
- Út, kör, összefüggő gráf, fagráf fogalma konkrét feladatokon keresztül
- Euler-körséta és Euler-séta konkrét feladatokban. A létezésük szükséges feltétele.
- Egyszerű Ramsey-típusú tételek (pl. $R(3,3)=6$)

FOGALMAK

„minden”, „van olyan”, gráf, gráf csúcsa, gráf éle

„ha ..., akkor ...”, sejtés, módszeres próbálkozás, cáfolat

gráf fokszámai, út és kör gráfokban, Euler-séta, Euler-körséta, fagráf

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- „Bírósági tárgyalás” játék
- „Einstein-fejtörő” típusú játék
- „Rontó” játék
- NIM játék; táblás játékok
- Az osztályteremben néhány tanuló feltételekkel vagy anélkül való elhelyezkedési lehetőségeinek lejátszása, összeszámplálása kör mentén, fal mellett
- Golyók sorba rendezése (lehetnek köztük egyformák is)

- Ábrák színezése, színezési lehetőségek összeszámlálása
- Lehetséges útvonalak összeszámlálása
- Fagylalt vásárlása kehelybe vagy tölcsérbe
- Számkártyás feladatok megoldása
- Gráfok alkalmazása kézfogások, köszöntések, körmérkőzések (visszavágóval vagy anélkül), családfák, ismeretségek szemléltetésére, különböző feltételek szerinti esetszétválasztás áttekintésére
- Logikai készlet épülésének szemléltetése gráffal
- Olyan, pl. kombinatorikus geometriai feladatok, amelyek megoldásánál hivatkozni kell arra, hogy végtelen sok lehetőség közül egy véges halmaz csak véges sok lehetőséget zár ki
- Feladatok, ahol a sakktábla színezése segít
- Hibás érme keresése kétkarú mérleggel, minél kevesebb méréssel
- Hanoi tornyai
- Königsbergi hidak feladata
- Lerajzolható-e egy ábra a ceruza felemelése nélkül?
- Harary játéka: két játékos felváltva saját színére színezi egy 6 csúcsú teljes gráf éleit, aki háromszöget hoz létre a saját színéből, az nyer
- Körmérkőzéses bajnokság szervezése minél kevesebb fordulóval, 4, 6, 8, 12 illetve 5, 7, 9 csapat számára
- Gráfok kibogozása (kereszteződés nélkül való lerajzolása)

TÉMAKÖR: Számelméleti ismeretek, hatvány, négyzetgyök

JAVASOLT ÓRASZÁM: 45 óra (25+20 óra)

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri a Pitagorasz-tételt és alkalmazza számítási feladatokban.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló

7. évfolyam végén

- ismeri a prímszám és az összetett szám fogalmakat; el tudja készíteni összetett számok prímtényező felbontását 1000-es számkörben;
- meghatározza természetes számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét;
- pozitív egész számok pozitív egész kitevőjű hatványát kiszámolja;
- ismeri az oszthatóság elemi tulajdonságait az egész számok körében□
- meghatározza a számok normál alakját;

8. évfolyam végén

- négyzetszámok négyzetgyökét meghatározza;
- bizonyítani tudja, hogy a prímek száma végtelen.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK 7. ÉVFOLYAMON

- Prímszámok, összetett számok kiválasztása a természetes számok közül

- Összetett számok prímtényező felbontásának ismerete és alkalmazása 1000-es számkörben
- Legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös meghatározása és alkalmazása
- Pozitív egész számok pozitív egész kitevőjű hatványának alkalmazása: prímtényező felbontás felírása hatványokkal, mértékegységek átváltása, számrendszerek helyi értékeinek felírása
- Relatív prímelek felismerése
- Negatív egész számok pozitív egész kitevőjű hatványának alkalmazása
- 10 pozitív egész kitevőjű hatványainak alkalmazása a helyi érték táblázatban
- Műveletek végzése hatványokkal
- Oszthatósági szabályok (2-vel, 5-tel, 3-mal, 9-cel, 11-gyel)
- A számelmélet alaptételének kimondása (bizonyítás nélkül)
- Egész számok hányadosának átalakítása periodikus tizedes törtté.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK 8. ÉVFOLYAMON

- Négyzetszámok négyzetgyökének kiszámolása
- Pozitív egész számok négyzetgyökének észszerű pontossággal való megadása számológéppel
- Tíz-es számrendszerben felírt szám átalakítása más alapú számrendszerbe és viszont.
- konkrét esetekben n alapú számrendszerben n , $n - 1$, $n + 1$ osztóival való oszthatósági szabályok.
- $d(n) = k$ alakú egyenletek megoldása
- $ax + by = c$ megoldása konkrét esetekben

FOGALMAK

prímszám, összetett szám, prímtényező felbontás, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös, hatvány, hatványalap, hatványkitevő, hatványérték, négyzetszám, négyzetszámok négyzetgyöke

relatív prímelek, pozitív egész számok négyzetgyöke

oszthatóság, köbszámok, egyszerű számelméleti függvények

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Eratoszthenészi szita alkalmazása prímelek keresésére
- Prímtényező felbontás kirakása színes rudakkal
- Prímtényező felbontás algoritmusának megmutatása
- „Bumm” játék a közös többszörösök felismerésére
- Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös meghatározása prímtényezővel
- Legnagyobb közös osztó alkalmazása törtek egyszerűsítésére
- Legkisebb közös többszörös alkalmazása közös nevező meghatározására
- Négyzet kirakása kisebb egybevágó négyzetekkel
- Négyzet területéből a négyzet oldalának meghatározása, ha a terület mérőszáma négyzetszám
- „Bumm” játék a relatív prímelek felismerésére
- Triminó a negatív egész számok pozitív egész kitevőjű hatványának alkalmazására
- 10 pozitív egész kitevőjű hatványainak megfigyelése a mértékváltásnál
- Dominó hatványokkal végzett műveletekhez

- Ismerkedés a zsebszámológép hatvány és négyzetgyök funkciójával
- Az osztók száma, a $d(n)$ függvény
- $\sqrt{2}$, \sqrt{n} irracionális, több bizonyítással
- Az euklideszi algoritmus alkalmazása két szám legnagyobb közös osztójának megkeresésére konkrét esetekben
- Műveletek (osztási) maradékokkal
- Döntsük el, p/q mikor véges, mikor végtelen tizedes tört

TÉMAKÖR: Arányosság, százalékszámítás

JAVASOLT ÓRASZÁM: 20 óra (15+10 óra)

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri az idő, a tömeg, a hosszúság, a terület, a térfogat és az űrtartalom szabványmértékegységeit, használja azokat mérések és számítások esetén;
- felismeri az egyenes és a fordított arányosságot konkrét helyzetekben;
- felismeri és megalkotja az egyenes arányosság grafikonját;
- mindennapi életben felmerülő egyszerű arányossági feladatokat old meg következtetéssel.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

7. évfolyamon

- ismeri a százalék fogalmát, gazdasági, pénzügyi és mindennapi élethez kötődő százalékszámítási feladatokat megold;
- idő, tömeg, hosszúság, terület, térfogat és űrtartalom mértékegységeket átvált helyi értékes gondolkodás alapján, gyakorlati célszerűség szerint;

8. évfolyamon

- gazdasági és pénzügyi élethez kötődő százalékszámítási feladatokat megold;
- helyesen és értelmesen kerekít, az eredményeket becsli, a becslést használja ellenőrzésre is.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK 7. ÉVFOLYAMON

- Egyenes és fordított arányosság felismerése és alkalmazása konkrét helyzetekben
- Egyenes arányosság grafikonjának megrajzolása
- Valóságos helyzetekhez kötődő százalékszámítás: áremelés, leárazás, egyszerű kamat, keverési feladatok megoldása, levegő összetétele, páratartalom
- Terület, térfogat, űrtartalom szabványmértékegységeinek ismerete és átváltása
- Digitális eszközök használata grafikon készítéséhez

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK 8. ÉVFOLYAMON

- Banki ajánlatok (ügycélcsoomagok, számlavezetési, megbízási és tranzakciós díjak) összehasonlításával kapcsolatos feladatok megoldása
- Megtakarítási és hitelfelvételi lehetőségekkel kapcsolatos egyszerű feladatok megoldása
- A fordított arányosság és a mérés kapcsolatának felismerése

FOGALMAK

fordított arányosság, százalék, terület, térfogat, űrtartalom szabványmértékegységei
aránypár, arányos osztás

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Egyenesen arányos mennyiségpárok keresése például vásárlás, parkettázás, mérés, egyenletes mozgás (megtett út – sebesség, megtett út – menetidő) esetén
- A fordított arányosság megtapasztalása torta, csokoládé egyenlő részekre osztásával
- Fordítottan arányos mennyiségpárok keresése például munkavégzés, mérés, egyenletes mozgás (adott út megtételénél sebesség–menetidő) esetén
- Azonos területű, különböző téglalapok oldalhosszainak megfigyelése, összehasonlítása
- Százalékszámításhoz, arányossághoz kapcsolódó példák gyűjtése reklámújságokból, banki ajánlatokból, más tantárgyak tankönyvi témáiból; csoportmunkában a hozott példák, problémák feldolgozása és bemutatása; a tapasztalatok irányított összegzése
- Projektmunka, például összejövétel, jótékonyági süteményvásár, osztálykirándulás költségvetésének tervezése
- Terület, térfogat, űrtartalom mérése különböző alkalmi, objektív és szabványmértékegységekkel
- Annak megtapasztalása, hogy adott mennyiséget különböző egységekkel mérve a kisebb egységből több, a nagyobb egységből kevesebb szükséges
- A mérőszám változásának megfigyelése a mértékegység átváltása után
- Térfogat és űrtartalom mértékegységei közötti kapcsolat megmutatása, például 1 dm élű üreges kocka feltöltése 1 liter folyadékkal
- Arányos osztásra vonatkozó ismert „furfangos” feladatok bemutatása, hasonló feladatok készítése önállóan

TÉMAKÖR: Szöveges feladatok előkészítése

JAVASOLT MINIMUM ÓRASZÁM: **25 óra**

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- különböző szövegekhez megfelelő modelleket készít;
- hibátlanul bontja fel a zárójeleket egyszerűbb algebrai kifejezésekben;
- magabiztosan kezeli az egyszerűbb algebrai kifejezéseket.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló 7. évfolyam végén:

- egyszerű betűs kifejezésekkel összeadást, kivonást végez, és helyettesítési értéket számol;
- egy- vagy kéttagú betűs kifejezést számmal szoroz, két tagból közös számtényezőt kiemel;
- egyismeretlenes elsőfokú egyenletet lebontogatással és mérlegelvvel megold;
- használja a hatványozás azonosságait pozitív egész kitevőre;
- használja a nevezetes azonosságokat;

A témakör tanulása eredményeként a tanuló 8. évfolyam végén:

- műveleteket végez algebrai törtekkel.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK 7. ÉVFOLYAMON

- Hétköznapi problémák matematikai tartalmának formalizálása; betűk használata az ismeretlen mennyiségek jelölésére
- Egyszerű betűs kifejezések összeadása, kivonása
- Helyettesítési érték számolása
- Egytagú kifejezések számmal való szorzása
- Kéttagú betűs kifejezés számmal való szorzása
- Két tagból közös számtényező kiemelése
- Egyismeretlenes elsőfokú egyenlet megoldása lebontogatással
- Egyismeretlenes elsőfokú egyenlet megoldása mérlegelvvel
- Egyismeretlenes elsőfokú egyenlőtlenség megoldása mérlegelvvel
- Zárójelfelbontás

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK 8. ÉVFOLYAMON

- Nevezetes azonosságok felismerése, alkalmazása
- Algebrai törtek egyszerűsítése, bővítése, összevonása

FOGALMAK

változó, együttható, helyettesítési érték, egytagú kifejezés, kéttagú kifejezés, egynemű kifejezés; kiemelés, egyenlet, lebontogatás, mérlegelv
azonosság, egyenlőtlenség, alaphalmaz, megoldáshalmaz
nevezetes azonosságok, teljes négyzet, algebrai tört

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Adott problémához többféle, ismeretlent tartalmazó műveletsor megadása, ezek közül a megfelelő kiválasztása
- Adott problémához megfelelő, betűt tartalmazó műveletsor megalkotása
- Adott, ismeretlent tartalmazó műveletsorhoz szöveges feladat írása
- „Dominó”, „triminó” játékkal az eredeti kifejezés és az átalakított kifejezés párba állítása
- „Gondoltam egy számot” játék: a tanár néhány műveletből álló műveletsorral számoltatja a gyerekeket az általuk gondolt számmal. A tanulók megmondják a kapott végeredményt, és a tanár „kitalálja” a gondolt számot. A tanár többféle algoritmus után felajánlja a szerepcserét. A fejben alkalmazott lebontogatási stratégia felfedése és formális leírása
- Mérlegelv bevezetése kétkarú mérleg alkalmazásával
- Egyismeretlenes elsőfokú egyenlőtlenség megoldási algoritmusának bemutatása kétkarú mérleg alkalmazásával
- Algebrai azonosságok gyakoroltatása pármunkában

TÉMAKÖR: Szöveges feladatok

JAVASOLT ÓRASZÁM: 25 óra

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- különböző szövegekhez megfelelő modelleket készít.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló 7. évfolyam végén:

- matematikából, más tantárgyakból és a mindennapi életből vett egyszerű szöveges feladatokat következtetéssel vagy egyenlettel megold;
- gyakorlati problémák megoldása során előforduló mennyiségeknél becslést végez;

A témakör tanulása eredményeként a tanuló 7. évfolyam végén:

- gazdasági, pénzügyi témájú egyszerű szöveges feladatokat következtetéssel vagy egyenlettel megold;
- tudatosan ellenőrzi a modellt és a szöveg kapcsolatát.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK 7. ÉVFOLYAMON

- Különböző szövegekhez megfelelő modellt készítése (például szakaszos ábrázolás, visszafelé gondolkodás, táblázat, szabadkézi vázlatrajz, betűs kifejezések felírása)
- Matematikából, más tantárgyakból, gazdasági területekről és a mindennapi életből vett egyszerű szöveges feladatok megoldása következtetéssel vagy egyenlettel
- Ellenőrzés a szövegbe való visszahelyettesítéssel
- Az együttműködéshez szükséges képességek fejlesztése páros és kiscsoportos tevékenykedtetés, feladatmegoldás során – a munka tervezése, szervezése, megosztása
- Az ellenőrzés, önellenőrzés iránti igény, az eredményért való felelősségvállalás erősítése

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK 8. ÉVFOLYAMON

- Pénzügyi tudatosság területét érintő feladatok megoldása
- Gyakorlati problémák megoldása során előforduló mennyiségek becslése
- Az együttműködéshez szükséges képességek fejlesztése páros és kiscsoportos tevékenykedtetés, feladatmegoldás során – a munka tervezése, szervezése, megosztása
- Az ellenőrzés, önellenőrzés iránti igény, az eredményért való felelősségvállalás erősítése

FOGALMAK

matematikai modell, ellenőrzés

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Szöveges feladatok megoldása csoportmunkában „feladatküldéssel”, „szakértői mozaik” alkalmazásával
- Gyűjtőmunka, csoportmunka, projekt készítése pénzügyi tudatosság területét érintő témák feldolgozására, például a háztartások bevételei és kiadásai: munkabér, bruttó bér, nettó bér, adó, kamat, társadalmi jövedelem (családi pótlék, nyugdíj), ösztöndíj, hitel; a költségvetés tervezése: háztartási napló, pénzügyi tervezés, egyensúly, többlet, hiány; egy tizenéves pénztárcája: zsebpénz, diákmunka, alkalmi jövedelmek, kimutatás a pénzmozgásokról, saját pénzügyi célok, tervek; korszerű pénzkezelés: bankszámla, bankkártyaválasztás, megtakarítások
- Kapcsolat a számelmélettel: oszthatósági szabályok
- Nevezetes egyenlőtlenségek bizonyítása és alkalmazása (például pozitív szám és reciprokának az összege)

TÉMAKÖR: A függvény fogalmának előkészítése

JAVASOLT ÓRASZÁM: 50 óra

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- felismeri az egyenes és a fordított arányosságot konkrét helyzetekben;
- felismeri és megalkotja az egyenes arányosság grafikonját;
- ismeri az elemi függvények grafikonját.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló 7. évfolyam végén:

- konkrét halmazok elemei között megfeleltetést hoz létre;
- értéktáblázatok adatait grafikusán ábrázolja;
- egyszerű grafikonokat jellemez

A témakör tanulása eredményeként a tanuló 8. évfolyam végén:

- egyszerű grafikonokat jellemez
- kapcsolatot talál egyenlet, egyenlőtlenség megoldása és grafikon között

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK 7. ÉVFOLYAMON

- Konkrét megfeleltetések legalább egy lehetséges szabályának megadása
- Egyszerű grafikonok jellemzése: növekedés – csökkenés, szélsőérték, tengelyekkel való metszéspont
- Konkrét halmazok elemei között megfeleltetés létrehozása
- Értéktáblázatok adatainak grafikus ábrázolása
- Az egyenes és a fordított arányosság felismerése konkrét helyzetekben
- Egyenes arányosság grafikonjának felismerése és megalkotása
- Lineáris, abszolútérték függvény,

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK 8. ÉVFOLYAMON

- Egészrész-, törtrész-, $1/x$ függvény, egyszerűbb másodfokú függvények, gyökfüggvény
- $f(x) + c$ ábrázolása eltolással
- Függvény zérushelyének kiszámítása
- Két grafikon metszéspontjának meghatározása
- Egyszerűbb egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása, a megoldások ábrázolása a számegyenesen.

FOGALMAK

megfeleltetés; egyenes és fordított arányosság; grafikon

négyzetgyök, egészrész, törtrész

inverzfüggvény, összetett függvény

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- A tanár által adott megfeleltetés szabályának felismerése
- Páros munkában saját szabály alkotása és felismertetése a társal
- A megfeleltetések szabályainak megbeszélése, érdekességek megfigyelése
- Grafikonok gyűjtése reklámújságokból, banki ajánlatokból, más tantárgyak tankönyvi témáiból; csoportmunkában a hozott grafikonok jellemzése és bemutatása (plakát készítése); a tapasztalatok irányított összegzése
- Az egyenes és fordított arányosság mint speciális megfeleltetés bemutatása, az összetartozó értékpárok grafikus ábrázolása
- Különböző grafikonok közül az egyenes és a fordított arányosság grafikonjának kiválasztása

- Termelési statisztikai adatok ábrázolása
- Számelméleti függvények számítógépes ábrázolása

TÉMAKÖR: Síkbeli alakzatok

JAVASOLT ÓRASZÁM: 45 óra

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása eredményeként a tanuló 7. évfolyam végén:

- ismeri a négyszögek tulajdonságait: belső és külső szögek összege, konvex és konkáv közti különbség, átló fogalma;
- ismeri a speciális négyszögeket: trapéz, paralelogramma, téglalap, deltoid, rombusz, húrtrapéz, négyzet;
- ismeri a speciális négyszögek legfontosabb tulajdonságait, ezek alapján elkészíti a halmazábrájukat;
- a háromszögek és a speciális négyszögek tulajdonságait alkalmazza feladatok megoldásában;
- meghatározza háromszögek és speciális négyszögek kerületét, területét;
- ismeri a Tálész-tételt és alkalmazza feladatokban;

A témakör tanulása eredményeként a tanuló 8. évfolyam végén:

- ismeri a Pitagorasz-tételt és alkalmazza számítási feladatokban;
- ismeri a kör részeit; különbséget tesz egyenes, félegyenes és szakasz között;
- ismeri és alkalmazza a párhuzamos szelők és a párhuzamos szelőszakaszok tételét számítási feladatokban;
- ismeri a derékszögű koordináta rendszert és abban algebrai módon megadott pontthalmazokat vizsgál;
- ismeri a vektorokat, tud számolni velük, és használja őket bizonyítások során.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK 7. ÉVFOLYAMON

- Négyszögek tulajdonságainak ismerete és alkalmazása: belső és külső szögek összege, konvex és konkáv közti különbség, átló fogalma
- A speciális négyszögek (trapéz, paralelogramma, téglalap, deltoid, rombusz, húrtrapéz, négyzet) felismerése és legfontosabb tulajdonságaik megállapítása ábra alapján; alkalmazásuk; halmazábra
- Háromszögek, speciális négyszögek kerületének, területének kiszámítása ábra alapján átdarabolással és tanult összefüggéssel; alkalmazások
- Háromszögek külső szögeinek összege
- Ismerkedés a háromszög néhány nevezetes vonalával: oldalfelező merőleges, szögfelező, magasságvonal
- Szabályos sokszögek legfontosabb tulajdonságainak megállapítása ábra alapján
- Sokszögek külső és belső szögeinek összege
- Háromszögben nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van
- Mértani helyek vizsgálata (szögfelező és szakaszfelező merőleges mint mértani hely)
- Szögszámítási feladatok

- Téglalap, háromszög és paralelogramma területe

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK 8. ÉVFOLYAMON

- Pitagorasz-tétel ismerete és alkalmazása
- Körrel kapcsolatos fogalmak ismerete
- Pitagorasz-i számhármak
- Szakasz felezőpontjának koordinátái
- A háromszög külső szögfelezői

FOGALMAK

négyszög, konvex, konkáv, átló, trapéz, paralelogramma, deltoid, rombusz, húrtrapéz, körvonal, körlap, középpont, sugár, húr, átmérő, szelő, érintő, körcikk

háromszög oldalfelző merőlegese, szögfelezője, magasságvonala, szabályos sokszög

háromszögek egybevágósági alapesetei, háromszögek hasonlóságának alapesetei, háromszög beírt és körülírt köre, egyenlőszárú háromszögek, háromszögek súlyvonalai és súlypontja

szögpárok: egyállású szögek, váltószögek, csúcsszögek

Javasolt tevékenységek

- Párhuzamos szélű papírcsíkból négyszögek nyírása; a keletkező négyszögek csoportosítása; annak megfigyelése, hogy hogyan kell nyírni, hogy téglalapot kapjunk; téglalapról négyzet nyírása, négyzetből téglalap nyírása
- Papír négyszögek hajtogatásával, síktükör alkalmazásával szimmetriatulajdonságok megfigyelése; tulajdonságok gyűjtése páros munkában, a párok megoldásainak bemutatása; a tapasztalatok irányított összegzése, halmazábra készítése
- Négyszögeket tartalmazó készletekből adott szempontoknak megfelelő elemek válogatása
- „Rontó” játék speciális négyszögekkel
- Papírból készült háromszögek, speciális négyszögek átdarabolásának megmutatása
- Gyakorlati számolási feladatok megoldása, például papírsárkány készítéséhez szükséges papír területének becslése, számolása
- Matematikatörténeti vonatkozások gyűjtése, tanulói kiselőadás tartása
- Derékszög kijelölése csomós kötéllal
- Pitagorasz-i számhármak keresése
- Háromszögelési probléma megoldása derékszögű háromszöggel az osztályteremben, az iskola épületében és a játszótéren
- „Körjáték”: jelzésre labda gurítása húr mentén, átmérő mentén, sugár mentén
- A háromszög oldalfelző merőlegeseinek, szögfelezőinek, magasságvonalainak megszerkesztésével sejtések megfogalmazása a nevezetes pontokról és azok elhelyezkedéséről
- Csoportmunka, projekt készítése a szabályos sokszögek legfontosabb tulajdonságainak bemutatására
- Matematikatörténeti kutatómunka a pitagorasz-i számhármakokról
- Érintőnégyzetek szemközti oldalainak összege egyenlő
- Halmazok ábrázolása derékszögű koordináta-rendszerben, pl. $1 < |x - y| < 2$ típusú feltételekkel megadott halmaz ábrázolása

- Az Euler-egyenes vizsgálata
- Háromszög hozzáírt köreinek megsejtése
- Háromszög súlyvonalainak vizsgálata
- Háromszög hozzáírt köreinek vizsgálata

TÉMAKÖR: Transzformációk, szerkesztések

JAVASOLT ÓRASZÁM: 40 óra

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása eredményeként a tanuló 7. évfolyam végén:

- megszerkeszti alakzatok tengelyes és középpontos tükröképét;
- geometriai ismereteinek felhasználásával pontosan szerkeszt több adott feltételnek megfelelő ábrát;
- megszerkeszti háromszög beírt és körülírt körét;
- ismer és használ dinamikus geometriai szoftvereket,

A témakör tanulása eredményeként a tanuló 8. évfolyam végén:

- felismeri a kicsinyítést és a nagyítást hétköznapi helyzetekben;
- ismer és használ dinamikus geometriai szoftvereket, tisztában van alkalmazási lehetőségeikkel;
- megszerkeszti alakzatok középpontosan kicsinyített és nagyított képeit;
- megszerkeszti alakzatok elforgatott és eltolt képét.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK 7. ÉVFOLYAMON

- Középpontos tükrözés ismerete és alkalmazása
- Középpontosan szimmetrikus alakzatok felismerése a természetes és az épített környezetben
- Szerkesztéshez terv, előzetes ábra készítése
- Több adott feltételnek megfelelő ábra szerkesztése; diszkusszió
- Dinamikus geometriai szoftver használata
- Kör érintőjének szerkesztése adott pontból
- Tengelyes tükrözés ismerete és alkalmazása
- Tengelyesen szimmetrikus alakzatok felismerése a természetes és az épített környezetben
- Alakzatok középpontos tükröképének megszerkesztése
- Alakzatok tengelyes tükröképének szerkesztése

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK 8. ÉVFOLYAMON

- Kicsinyítés és nagyítás felismerése hétköznapi helyzetekben
- Dinamikus geometriai szoftver használata
- Eltolás ismerete és alkalmazása
- Alakzatok eltolt példányának szerkesztése

FOGALMAK

szimmetria-középpont, középpontos szimmetria, kicsinyítés, nagyítás
tükrötengely, eltolásvektor
egybevágósági transzformációk, középpontos hasonlóság, vektorok

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Ábrák másolása másolópapír (például sütőpapír) segítségével; a másolat síkban való pont körüli elfordítása 180° -kal; tulajdonságok megfigyelése
- Osztályterem, iskola, közeli játszótér, park, tó, épület középpontosan szimmetrikus alakzatainak kiválasztása
- Középpontos tükrözésen alapuló szerkesztések elvégzése saját eszközökkel (körző, egyélű vonalzó)
- Szimmetria stratégiával nyerhető játékok, például kerek asztalra poharak elhelyezése
- Kicsinyítés és nagyítás megfigyelése, például háromszögvonalzó külső és belső pereme, makett, modell, tervrajz, fénykép, diavetítés, térkép, mikroszkóp, nagyító
- Szerkesztési feladatok megoldása során dinamikus geometriai szoftver megismerése; az euklideszi szerkesztési lépések követése a szoftverrel
- Két kör közös érintőinek szerkesztése
- Középpontos tükrözés és 90 fokos forgatás képlete a derékszögű koordináta-rendszerben
- Geometriai szélsőérték-feladatok (legrövidebb út keresése szerkesztéssel)

TÉMAKÖR: Térgeometria

JAVASOLT ÓRASZÁM: 27 óra

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri az idő, a tömeg, a hosszúság, a terület, a térfogat és az űrtartalom szabványmértékegységeit, használja azokat mérések és számítások esetén.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló 7. évfolyam végén:

- a kocka, a téglatest, a hasáb hálóját elkészíti;
- testeket épít képek, nézetek, alaprajzok, hálók alapján;
- ismeri a kocka, a téglatest, a hasáb következő tulajdonságait: határoló lapok típusa, száma, egymáshoz viszonyított helyzete; csúcsok, élek száma; lapátló, testátló;
- egyenes hasáb, téglatest, kocka alakú tárgyak felszínét és térfogatát méréssel megadja, egyenes hasáb felszínét és térfogatát képlet segítségével kiszámolja; a képleteket megalapozó összefüggéseket érti;
- a kocka, a téglatest, a hasáb, tulajdonságait alkalmazza feladatok megoldásában;
- ismeri a térelemek szögének fogalmát, alkalmazza számítási feladatokban.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló 8. évfolyam végén:

- a gúla hálóját elkészíti;
- testeket épít képek, nézetek, alaprajzok, hálók alapján;
- ismeri a gúla következő tulajdonságait: határoló lapok típusa, száma, egymáshoz viszonyított helyzete; csúcsok, élek száma; lapátló,
- ismeri a gömb tulajdonságait;
- a gúla, a gömb tulajdonságait alkalmazza feladatok megoldásában;
- ismeri a tetraéder beírt és körülírt gömbjét;
- felismeri a paralelepipedont, ismeri a tulajdonságait;

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK 7. ÉVFOLYAMON

- Környezetünk tárgyaiban a hasáb alakú testek felfedezése
- Hasáb tulajdonságainak ismerete és alkalmazása: határoló lapok típusa, száma, egymáshoz viszonyított helyzete; csúcsok, élek száma; lapátló, testátló
- Testek építése képek, nézetek, alaprajzok, hálók alapján
- Testek hálójának készítése
- Egyenes hasáb alakú tárgyak felszínének és térfogatának meghatározása méréssel és számolással

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK 8. ÉVFOLYAMON

- Környezetünk tárgyaiban a gúla és a gömb alakú testek felfedezése
- Gúla tulajdonságainak ismerete és alkalmazása: határoló lapok típusa, száma, egymáshoz viszonyított helyzete; csúcsok, élek száma; lapátló, testátló
- A gömb tanult testektől eltérő tulajdonságai
- A gömb, mint a Föld modellje: hosszúsági körök, szélességi körök tulajdonságai, síkmetszetek
- Ismerkedés a forgáshengerrel és a forgáskúppal

FOGALMAK

hasáb, gúla, gömb, alaplap, alapél, oldallap, oldalél, testmagasság

forgáshenger, forgáskúp

tetraéder, tetraéder beírt és körülírt gömbje, tetraéder súlyvonalai

általános henger, kúp, paralelepipedon, térelemek szöge

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Osztályterem, iskola, iskola környékének megfigyelése geometriai szempontból (a testek kiválasztása)
- Hasáb és gúla alakú modell tulajdonságainak gyűjtése páros munkában, a párok megoldásainak összehasonlítása; a tapasztalatok irányított összegzése
- Egyéni munkában építmények, rajzok, hálók készítése; az alkotások összehasonlítása, megbeszélése, kiállítása az osztályteremben
- Zsinóros térgeometriai modellek készítése és használata
- A gömb speciális tulajdonságainak megfigyeléséhez testeket tartalmazó készletből elemek választása megadott szempontok alapján
- Földgömb bemutatása matematikai szempontból
- Tapasztalatszerzés a gömbi geometria alapjairól például narancson
- Egyenes hasáb alakú dobozok készítéséhez szükséges papír területének becslése, mérése, számolása
- Egyenes hasáb alakú üreges test „feltöltése” egységkockákkal (becslés, mérés, számolás)
- Forgástestek származtatása „zászlós” modellel; a forgáshenger és a forgáskúp kiválasztása
- Gyűjtőmunka: forgástestek a környezetünkben
- A tetraéder hozzáírt gömbjeinek vizsgálata
- Példa olyan tetraéderre, melynek nincs magasságpontja

TÉMAKÖR: Leíró statisztika

JAVASOLT ÓRASZÁM: 15 óra

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása eredményeként a tanuló 8.évfolyam végén:

- értelmezi a táblázatok adatait, az adatoknak megfelelő ábrázolási módot kiválasztja, és az ábrát elkészíti;
- adatokat táblázatba rendez, diagramon ábrázol hagyományos és digitális eszközökkel is;
- különböző típusú diagramokat megfeleltet egymásnak;
- megadott szempont szerint adatokat gyűjt ki táblázatból, olvas le hagyományos vagy digitális forrásból származó diagramról, majd rendszerezés után következtetéseket fogalmaz meg;
- konkrét adatsor esetén átlagot számol, megállapítja a leggyakoribb adatot (módusz), a középső adatot (medián), és ezeket összehasonlítja.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK 8. ÉVFOLYAMON

- Adathalmazok, egyszerű diagramok, táblázatok adatainak elemzése
- Adatok táblázatba rendezése, ábrázolása diagramon
- Különböző típusú diagramok megfeleltetése egymásnak
- Adatok gyűjtése táblázatból, leolvasása hagyományos vagy digitális forrásból származó diagramról megadott szempont szerint
- Adatok rendszerezése, következtetések megfogalmazása
- Konkrét adatsor leggyakoribb adatának (módusz) megtalálása, gyakorlati alkalmazása
- Rendezhető adatsor középső adatának (medián) megállapítása, gyakorlati alkalmazása
- Konkrét adatsor esetén átlag, leggyakoribb adat (módusz), középső adat (medián) megfigyelése, összehasonlítása

FOGALMAK

oszlopdiaagram, kördiaagram, vonaldiaagram, pontdiaagram

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Megadott vagy a tanulók által gyűjtött adatok ábrázolása és elemzése csoportmunkában
- Projektmunka, például felmérés készítése zenehallgatási szokásokról, IKT-eszközök használatáról, sportolási szokásokról (gyűjtőmunka, a gyűjtött adatok bemutatása, megbeszélése, értelmezése, ábrázolása)
- Konkrét adathalmazok középérték-mutatóinak megállapítása és összehasonlítása csoportmunkában

TÉMAKÖR: Valószínűségszámítás

JAVASOLT ÓRASZÁM: 22 óra

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása eredményeként a tanuló 8. évfolyam végén:

- valószínűségi játékokat, kísérleteket végez, ennek során az adatokat tervszerűen gyűjti, rendezi és ábrázolja digitálisan is;
- valószínűségi játékokban érti a lehetséges kimeneteleket, játékában stratégiát követ;

- ismeri a gyakoriság és a relatív gyakoriság fogalmát. Ismereteit felhasználja a „lehetetlen”, a „biztos” és a „kisebb/nagyobb eséllyel lehetséges” kijelentések megfogalmazásánál;
- képet alkot a valószínűségszámítás fogalomalkotási folyamatairól (pl. a szimmetria szerepe valószínűségek meghatározásában).

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK 8. ÉVFOLYAMON

- Valószínűségi játékok, kísérletek; az adatok tervszerű gyűjtése, rendezése és ábrázolása digitálisan is
- Valószínűségi játékok lehetséges kimeneteleinek ismeretében stratégia követése
- Az esély intuitív fogalmának felhasználása a „lehetetlen”, a „biztos” és a „kisebb/nagyobb eséllyel lehetséges” kijelentések megfogalmazásánál
- A gyakoriság és relatív gyakoriság ismerete és alkalmazása a kísérletezés során
- Valószínűségi feladatok megoldása komplementer esemény valószínűségének kiszámolásával
- Feltételes valószínűséggel kapcsolatos, egyszerűbb, konkrét feladatok megoldása.

FOGALMAK

esély, gyakoriság, relatív gyakoriság, esemény, komplementer esemény

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Játék dobókockákkal, dobótestekkel, pénzérmével, szerencsekerékkel, Galton-deszrával, zsákba helyezett színes golyókkal
- Játék eseménykártyákkal gyakoriság becslésére: mindenki előtt ott van minden eseménykártya, amelyekre a tanulók a játék elején tetszés szerint kiraknak 10-10 zsetont; sorban végezzük a kísérleteket; amelyik kártyán levő esemény bekövetkezett, arról a kártyáról levehet a játékos egy zsetont; az győz, akinek a kártyáiról leghamarabb elfogynak a zsetonok
- Játék számkorongokkal: 3 korong piros és kék oldalára is számokat írtunk; feldobjuk egyszerre a 3 korongot; kártyákra eseményeket írunk a dobott számok összegére, szorzatára vonatkozó tulajdonságokkal; figyeljük meg, van-e lehetetlen, van-e biztos esemény; tippeljünk az események gyakoriságára
- Folyón átkelés gyakoriság becslésére: rakj ki 10 korongot az 1–13 számokhoz a folyó egyik partjára; két kockával dobunk, a dobott számok összegénél álló korong átkelhet a folyón; az győz, akinek először átmegy az összes korongja
- Kocka alakú, számozott lapú doboz egyik lapjára belül nehezéket ragasztunk; dobások eredményének megfigyelésével ki kell találni, melyik lapra ragasztottunk nehezéket
- 21-es különbözőképpen számozott dobókockákkal, dominókkal
- „Nem hiszem” páros játék: egyik játékos események bekövetkezésének esélyeiről fogalmaz meg állítást (például nagyobb eséllyel lehetséges számozott dodekaéder dobótesttel prímszámot dobni, mint összetett számot), a másik játékos dönt ennek igazságáról; a játékot az a tanuló nyeri, aki igazat állít
- „Szavazós” játék páros vagy csoportmunkában: valószínűségi játék vagy kísérlet előtt a tanulók összegyűjtik a lehetséges kimeneteleket, majd egyesével tippelnek a bekövetkezési esélyekről
- Monty Hall-paradoxon eljátszása

- A csoportban mindenki írjon egy 50 hosszú Fej/Írás sorozatot, amit véletlennek gondol, ezután tényleg dobjon is fel 50-szer egy érmét, és írja le a dobássorozatát. A többiek próbálják meg kitalálni, hogy melyik volt a valódi véletlen

9–10. évfolyam

A 9–10. évfolyamon a korábbi képzési szakaszok során megszerzett ismeretekre és kialakított készségekre, képességekre alapozva – a spirális tananyagfelépítést szem előtt tartva – az egyes témakörök új ismeretei matematikai szempontból egyre pontosabb és elvontabb formában jelennek meg a tanulási-tanítási folyamat során. Egyre határozottabb a fogalmak pontos definiálásának, az állítások, tételek indoklásának, bizonyításának, valamint az általánosításnak az igénye. Erre a szakaszra fokozottan jellemző az ismeretek egységes rendszerbe foglalása, a rendszerezés.

Ebben a szakaszban is fontos cél, hogy az ismeretszerzési folyamat során a tanuló lehetőleg a tanár által irányított módon, feladatok megoldása mentén maga fedezze fel az összefüggéseket, általánosítási lehetőségeket, megoldási módokat. A kooperatív munkaformák, a csoportmunkában vagy önállóan megoldandó projektfeladatok fejlesztik a matematikai kommunikációt. A digitális eszközök, dinamikus szoftverek, támogatják a szemléltetést, a megértést és a felfedeztetést.

A 9–10. évfolyamon megjelenő témakörök tartalmának egy része folytatása és kiegészítése a korábbi szakaszokban is megjelenő tananyagtartalmaknak. Ezek az elsőfokú egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek; másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, algoritmusok, komplex számok, számtani és mértani sorozat, lineáris algebra, polinomok; a függvény fogalma, függvénytulajdonságok; a kör és részei, a trigonometria. Vannak olyan témakörök, amelyek megjelennek más területek tanítása során is, ezért a tananyag egyes részeihez javasolt óraszámok nem feltétlenül jelentenek időben összefüggő egységet. Az algebrai eszközök és a függvényekkel kapcsolatos ismeretek bővülése lehetővé teszi a hétköznapi vagy matematikai nyelven megfogalmazott problémák és a megoldás során alkalmazott matematikai modellek körének bővülését.

A 9–10. évfolyamon a matematika tantárgy javasolt óraszám 408 óra. Az egyes témakörökhöz írt óraszámok javaslatok. Az új ismeretek a teljes óraszám negyötöd része alatt a legtöbb tanuló számára elsajátíthatók, így a fennmaradó órák felhasználhatók ismétlésre, gyakorlásra, felzárkóztatásra, tehetséggondozásra és számonkérésre.

A témakörök áttekintő táblázata:

Témakör neve	Javasolt óraszám	9. évf.	10. évf.
Halmazok	<u>15</u>	15	0
Matematikai logika	<u>15</u>	10	5
Kombinatorika, gráfok <u>és algoritmusok</u>	<u>70</u>	25	45
Számhalmazok, műveletek	<u>40</u>	30	10
Hatvány, gyök	<u>15</u>	5	10
Betűs kifejezések alkalmazása egyenletmegoldás, függvényábrázolás során, <u>komplex számok bevezetése</u>	<u>15</u>	5	10
Arányosság, százalékszámítás, <u>számtani és mértani sorozat</u>	<u>15</u>	15	0
Elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek, <u>lineáris algebra</u>	<u>30</u>	15	15

Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, polinomok	30	5	25
A függvény fogalma, függvénytulajdonságok, szemléletes analízis	30	15	15
Geometriai alapismeretek	8	8	0
Háromszögek, trigonometria	35	20	15
Négyszögek, sokszögek	15	6	9
A kör és részei	15	10	5
Transzformációk, szerkesztések	30	10	20
Leíró statisztika	10	10	0
Valószínűségszámítás	20	0	20
Összes óraszám:	408	204	204

TÉMAKÖR: Halmazok

JAVASOLT ÓRASZÁM: 15 óra (15 + 0 óra)

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- látja a halmazműveletek és a logikai műveletek közötti kapcsolatokat;
- véges halmazok elemszámát meghatározza;
- alkalmazza a logikai szita elvét;
- megbízható ismeretekkel és tapasztalattal rendelkezzen arról, hogy a végtelen halmazok világa miben különbözik a véges halmazokétól (pl. egy valódi részhalmaz nem feltétlenül kisebb számosságú).

A témakör tanulása eredményeként a tanuló a 9. évfolyam végére:

- adott halmazt diszjunkt részhalmazaira bont, osztályoz;
- halmazokat különböző módokon megad;
- halmazokkal műveleteket végez, azokat ábrázolja és értelmezi;
- különbséget tud tenni a „tetszőlegesen sok” és a „végtelen sok” fogalma között;
- szemléletes képpel rendelkezik zárt és nyílt halmaz fogalmáról (síkon és térben).

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK A 9. ÉVFOLYAMON

- Halmaz közös elem nélküli részhalmazokra bontása, példák ennek alkalmazására a matematikán belül, más tantárgyaknál és a mindennapi életben
- Halmaz megadása utasítással, elemek felsorolásával
- Halmazok közötti viszonyok ábrázolása, értelmezése
- Halmazok metszetének, uniójának, különbségének, komplementerének képzése, ábrázolása és értelmezése
- Két-három halmaz elemszámával kapcsolatos feladatok megoldása logikai szita segítségével
- Szemléletes kép végtelen halmazokról
- Halmazműveletek algebrája (unió, metszet, különbség, szimmetrikus differencia), kommutativitás, asszociativitás és disztributivitás vizsgálata ezek világában
- Szita formula általánosan
- Megszámlálhatóan végtelen halmazok
- A sík és a tér érdekes véges, ill. végtelen részhalmazai

FOGALMAK

alaphalmaz, részhalmaz, üres halmaz, halmazok egyenlősége, Venn-diagram; halmazműveletek: unió, metszet, különbség, komplementer halmaz; diszjunkt halmazok, halmaz elemszáma, logikai szita

szimmetrikus differencia, megszámlálhatóan végtelen halmaz

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Hétköznapi életből, más tantárgyakból vagy a matematikából vett, konkrétan vagy digitálisan megjelenített alaphalmazból megadott tulajdonságokkal rendelkező elemek válogatása
- Konkrét részhalmaz esetén a részhalmaz képzési szempontjainak megállapítása
- A történelem, a művészetek, a tudományok, a sport neves személyiségeinek kitalálása különböző tulajdonságok alapján
- Barkochba játék
- A „végtelen szálloda” mint modell
- Megszámlálhatóan végtelen számosságú halmazok elemei között egyértelmű hozzárendelés felfedeztetése, például a pozitív természetes számok halmazának számossága megegyezik a pozitív páros számok halmazának számosságával
- Kifejező halmazábrák készítése háromnál több halmazra
- Adott n -hez relatív prím, n -nél kisebb számok megszámlálása logikai szitával (Euler-féle φ -függvény)

TÉMAKÖR: Matematikai logika

JAVASOLT ÓRASZÁM: 15 óra (10 + 5 óra)

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- látja a halmazműveletek és a logikai műveletek közötti kapcsolatokat;
- megállapítja egyszerű „ha ... , akkor ...” és „akkor és csak akkor” típusú állítások logikai értékét;
- tud egyszerű állításokat indokolni és tételeket bizonyítani;
- az indirekt bizonyítás módszerét megbízhatóan alkalmazza;
- tételeket bizonyít a teljes indukció módszerével;
- önállóan sejtéseket fogalmaz meg;
- átlátja sejtés, tétel, bizonyítás, cáfolat, példa és ellenpélda logikai viszonyait.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

9. évfolyam végén

- adott állításról eldönti, hogy igaz vagy hamis;
- alkalmazza a tagadás műveletét egyszerű feladatokban;
- ismeri és alkalmazza az „és”, a (megengedő és kizáró) „vagy” logikai jelentését;
- megfogalmazza adott állítás megfordítását;
- helyesen használja a „minden” és „van olyan” kifejezéseket, és az ezeket jelölő kvantorokat;

- különbséget tud tenni „szükséges”, „elégséges”, illetve „szükséges és elégséges” feltétel fogalma között;

10. évfolyam végén

- fel tudja használni az ekvivalenciareláció fogalmát bizonyításokban.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK A 9. ÉVFOLYAMON

- A matematikai bizonyítás fogalma
- Állítás logikai értékének megállapítása (igaz vagy hamis)
- Állítás tagadásának alkalmazása egyszerű feladatokban
- A „nem”, az „és”, a megengedő „vagy” és a kizáró „vagy” logikai jelentésének ismerete és alkalmazása matematikai és matematikán kívüli feladatokban
- A „minden” és a „van olyan” típusú állítások logikai értékének megállapítása és ennek indoklása egyszerű esetekben
- Adott állítás megfordításának megfogalmazása
- „Ha..., akkor...” és „akkor és csak akkor” típusú egyszerű állítások logikai értékének megállapítása
- Stratégiai és logikai játékok

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK A 10. ÉVFOLYAMON

- Reláció és ekvivalenciareláció fogalma, számos példával
- Kétváltozós logikai műveletek és tulajdonságaik (asszociativitás, kommutativitás, disztributivitás, de Morgan-azonosságok)

FOGALMAK

tétel, bizonyítás, igaz-hamis; „nem”, „és”, „vagy”, „vagy..., vagy...”, „ha..., akkor...”, „akkor és csak akkor”

„szükséges”, „elégséges”, „szükséges és elégséges” feltétel, sejtés, tétel, ellenpélda, teljes indukció, kezdő lépés, indukciós lépés, reláció, ekvivalenciareláció

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- „Bírósági tárgyalás”, ahol az osztály tanulói a védők és a vádlók egy állítás indoklására, cáfolására
- „Mit állít a szigetlakó?”, „Ki volt a tettes, ha...?” típusú feladatok eljátszása, megoldása csoportmunkában
- Logikai készséget fejlesztő játékok, például „Einstein-fejtő”
- Stratégiai játékok, például egyszerű NIM játékok, táblás játékok
- Tudatos pénzügyi tervezést segítő játékok

TÉMAKÖR: Kombinatorika, gráfok és algoritmusok

JAVASOLT ÓRASZÁM: 70 óra (25 + 45 óra)

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a 9. évfolyam végére:

- matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
- a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;

- a kiválasztott modellben megoldja a problémát;
- megold sorba rendezési és kiválasztási feladatokat;
- véges halmazok elemszámát meghatározza;
- alkalmazza a logikai szita elvét;

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a 10. évfolyam végére:

- konkrét szituációkat szemléltet és egyszerű feladatokat megold gráfok segítségével;
- a teljes indukció módszerét és változatait kombinatorikai és gráfelméleti feladatokban alkalmazza;
- kombinatorikus interpretációval igazol azonosságokat;
- a binomiális együtthatókat megbízhatóan használja kombinatorikai és algebrai feladatokban;
- gráfokat használ gyakorlati problémák modellezéséhez;
- algoritmusokat konstruál egyszerű optimalizációs feladatok megoldásához;
- érti a mohó algoritmusok erejét és korlátait.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK A 9. ÉVFOLYAMON

- Hétköznapi helyzetekhez kapcsolódó sorba rendezési és kiválasztási feladatok megoldása rendszerezéssel
- Sorba rendezési és kiválasztási feladatok megoldása matematikai problémákban
- Esetszétválasztás és szorzási elv alkalmazása feladatok megoldásában
- Összeszámlálási modellek alkalmazása feladatok megoldásában
- Permutációk különböző felírási módjai

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK A 10. ÉVFOLYAMON

- Gráfok alkalmazása konkrét hétköznapi és matematikai szituációk szemléltetésére, feladatok megoldására
- Pascal-háromszög tulajdonságai
- Binomiális és polinomiális tétel bizonyítása
- A kettős leszámlálás módszere
- Gráfok összefüggőségi komponensekre bontása és alkalmazása
- A fa definícióinak ekvivalenciája, fa élszámára, szerkezetére, mini-max-tulajdonságára vonatkozó tételek
- Gráfok színezései, maximális klikkméret és kromatikus szám kapcsolata
- Páros gráf fogalma
- Ramsey-típusú tételek, Erdős–Szekeres-tétel
- Szélességi és mélységi keresés alkalmazása bizonyításokban és feladatmegoldásban
- A mohó algoritmus szuboptimális független él- és pontrendszerek keresésére
- Algoritmus mérete, lépésszáma

FOGALMAK

gráf, gráf csúcsa, gráf éle

izomorf gráfok, gráf összefüggőségi komponensei, szélességi keresés, síkbrajzolható gráf, kromatikus szám, független csúcs- és élhalmaz

szélességi és mélységi keresés, mohó algoritmus, algoritmus lépésszáma

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Sorba rendezési és kiválasztási feladatok megoldása rendszerezett leszámplálással és a szorzási és/vagy esetszétválasztási elv alkalmazásával
- Geometriai eszközök használata kombinatorikai problémák megoldására
- Néhány feltételt tartalmazó tanulói órarend készítése kis elemszámmal
- Azonos modellen alapuló, de különböző megfogalmazású feladatok megoldása
- Szorzat vagy összeg alakban megadott eredményű kombinatorikafeladatokhoz saját szöveg írása
- Téves megoldású kombinatorikafeladatokban a hiba megtalálása és a tévedés kijavítása
- Sorba rendezési feladatok megoldásának szemléltetése gráffal
- Adott gráfhoz hozzáillő feladatszöveg alkotása és „feladatküldés” csoportmunkában
- Permutációk különböző felírási módjaival megoldható feladatok
- Catalan-számok segítségével megoldható feladatok
- Faváz keresése gráfokban
- Gráf vagy komplementere összefüggő
- Mese a négyzintételről, hatszintétel és ötszintétel bizonyítása
- Gráfban adott pontok közti legrövidebb, leghosszabb utak megkeresése algoritmussal
- Hátizsákfeladat

TÉMAKÖR: Számhalmazok, műveletek

JAVASOLT ÓRASZÁM: 40 óra (30 + 10 óra)

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri a számhalmazok épülésének matematikai vonatkozásait a természetes számoktól a valós számokig;
- ismer példákat irracionális számokra;
- ismeri a kongruenciákat és maradékosztályokat.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló

9. évfolyam végén:

- a kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás műveleti azonosságokat helyesen alkalmazza különböző számolási helyzetekben;
- racionális számokat tizedes tört és közös nevező tört alakban is felír;
- ismeri a valós számok és a számegegyenes kapcsolatát;
- ismeri és alkalmazza az abszolút érték, az ellentett és a reciprokok fogalmát;
- a teljes indukciót alkalmazza oszthatósági feladatokban.

10. évfolyam végén:

- a számolással kapott eredményeket nagyságrendileg megbecsüli, és így ellenőrzi az eredményt;
- valós számok közelítő alakjaival számol, és megfelelően kerekít;

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK 9. ÉVFOLYAMON

- Műveleti azonosságok (kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás), zárójelek helyes használata
- Tizedes törtek átírása közös törtszám alakba és viszont
- Irracionális számok szemléltetése
- Racionális számok elhelyezkedése számegyenesen
- Nyílt és zárt intervallumok fogalmának ismerete és alkalmazása
- Számok abszolút értékének, ellentettjének és reciprokéinak meghatározása
- Számológéppel elvégzett számítások eredményének előzetes becslése és nagyságrendi ellenőrzése
- Valós számok adott jegyre kerekítése
- Valós számok gyakorlati helyzetekben történő észszerű kerekítése
- Az euklideszi algoritmussal előállítható a legnagyobb közös osztó
- A pitagoraszi számhármak előállítása

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK 10. ÉVFOLYAMON

- Prímekkel kapcsolatos tételek: pl. a szomszédos prímelek között tetszőlegesen nagy hézag van, Wilson-tétel, végtelen sok $4k - 1$ és $6k - 1$ alakú prím van. [Csebisev, Dirichlet]. Mersenne- és Fermat-prímek. Sejtések: pl. Goldbach-sejtés
- Lineáris kétismeretlenes diofantikus egyenlet megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele
- Lineáris egyismeretlenes kongruenciák megoldási algoritmusa
- Euler–Fermat-tétel
- A maradékosztályok gyűrűje. Konkrét modulusok esetén annak eldöntése, hogy melyik maradékosztálynak van multiplikatív inverze
- A páros tökéletes számok
- Rács egyenes, rácspont, rácsháromszög, üres rácsháromszög
- Számelméleti függvények, multiplikatív és additív tulajdonságok

FOGALMAK

racionális szám, irracionális szám, valós szám, nyílt intervallum, zárt intervallum, abszolút érték, ellentett, reciprok

kongruencia, maradékosztályok, a maradékosztályok gyűrűje
a rácsgéometria elemei, számelméleti függvények

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- A számológép helyes használatának elsajátítása, például műveleti sorrend, zárójelek
- Írásban elvégzett műveletek ellenőrzése számológéppel
- Célszám megközelítése adott számjegyekkel, műveleti jelek és zárójelek használatával
- Tanulói kiselőadás a helyi értékes számírás kialakulásáról, a számjegyek kialakulásának történetéről
- A tanteremben vagy a tanterem környezetében végzett mérések esetén a megfelelő kerekítés alkalmazása
- Adott mérés elvégzése esetén a mérési hiba következményeinek vizsgálata
- Keressük egész együtthatós polinomok racionális gyökeit
- Igazoljuk, hogy nem prímmódulus esetén van nullosztó

- Igazoljuk a Pick-tételt

TÉMAKÖR: Hatvány, gyök

JAVASOLT ÓRASZÁM: 15 óra (5 + 10 óra)

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri és alkalmazza az n -edik gyök fogalmát;
- ismeri és alkalmazza a racionális kitevőjű hatvány fogalmát és a hatványozás azonosságait;
- felismeri az ekvivalens és nem ekvivalens lépéseket az egyenletmegoldás során.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló

a 9. évfolyam végén:

- ismeri és alkalmazza a négyzetgyök fogalmát és azonosságait;
- ismeri és alkalmazza az egész kitevőjű hatvány fogalmát és a hatványozás azonosságait;
- ismeri és alkalmazza a normálalak fogalmát;

a 10. évfolyam végén:

- ismeri és alkalmazza a hamis gyök és a gyökvesztés fogalmát.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK A 9. ÉVFOLYAMON

- Valós számok hatványozása pozitív egész kitevőre
- Hatványozás 0 és negatív egész kitevőre
- A hatványozás azonosságainak megfigyelése, felfedezése
- A hatványozás azonosságainak bizonyítása konkrét alapszám és tetszőleges pozitív egész kitevő esetén
- Számok normálalakja
- Számolás normálalak segítségével
- A négyzetgyök definíciója
- Nemnegatív számok négyzetgyökének megadása számológép segítségével
- A négyzetgyökvonás azonosságai

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK A 10. ÉVFOLYAMON

- Másod- és harmadfokú, továbbá gyökös egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása
- Komplex számok

FOGALMAK

hatványalap, hatványkitevő, normálalak, négyzetgyök
nevezetes közepek, komplex számok

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Projektmunka: hányszor lehet félbehajtani egy nagyméretű papírt? Keresés az interneten, kísérlet végzése például egy teljes guriga vécépapírral
- Internetes forrásból származó, nagyon kicsi vagy nagyon nagy számokat tartalmazó cikkek valóságtartalmának megállapítása páros vagy csoportmunkában

- Hatványközepek és geometria kapcsolata
- Dinamikus geometriai szoftver használata függvényábrázolásra

TÉMAKÖR: Betűs kifejezések alkalmazása egyenletmegoldás, függvényábrázolás során, komplex számok bevezetése

JAVASOLT ÓRASZÁM: 15 óra (5 + 10 óra)

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása eredményeként a tanuló

a 9. évfolyam végén:

- műveleteket végez algebrai kifejezésekkel;
- ismer és alkalmaz egyszerű algebrai azonosságokat;
- átalakít algebrai kifejezéseket összevonás, szorzattá alakítás, nevezetes azonosságok alkalmazásával;
- teljes négyzetté alakít, megoldóképletet használ;

a 10. évfolyam végén

- paraméteres szöveges feladatokat és egyenleteket old meg.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK A 9. ÉVFOLYAMON

- Műveletek egyszerű algebrai kifejezésekkel: összeadás, kivonás, szorzás, osztás, egytagú kifejezések hatványa
- Műveleti azonosságok ismerete és alkalmazása egyenletek megoldása során
- Az $(a + b)^2$, az $(a - b)^2$ és az $(a + b)(a - b)$ kifejezésekre vonatkozó nevezetes azonosságok ismerete és alkalmazása (például oszthatósági feladatokban, egyenletek megoldásában, függvények ábrázolásában)
- Egyszerű másodfokú polinom átalakítása teljes négyzetté kiegészítéssel
- Algebrai kifejezések átalakítása összevonás, szorzattá alakítás, nevezetes azonosságok alkalmazásával
- Az algebrai tört fogalmának ismerete, műveletek algebrai törtekkel

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK A 10. ÉVFOLYAMON

- A komplex számok testének alaptulajdonságai
- Moivre-tétel
- Gyökvonás komplex számokból; egységgyökök
- Számolás komplex számokkal

FOGALMAK

összeg, tag, szorzat, tényező, egynemű kifejezés, együttható, teljes négyzet, polinom algebrai tört, komplex szám, imaginárius egység, egységgyök

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- „Gondolj egy számra, és én kitalálom” játék, matematikai bűvésztükkök algebrai magyarázata
- Algebrai kifejezésekkel végzett műveletek geometriai modellezése
- A nevezetes azonosságok geometriai megjelenítése

- Számolási „trükkök” a nevezetes azonosságok segítségével, például kétjegyű számok négyzetének, $99 \cdot 101$ típusú szorzat eredményének kiszámolása fejben
- Harmadfokú egyenlet megoldása
- Matematikatörténeti vonatkozások: Tartaglia, Cardano

TÉMAKÖR: Arányosság, százalékszámítás, számtani és mértani sorozat

JAVASOLT ÓRASZÁM: 15 óra (15 + 0 óra)

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri a hosszúság, terület, térfogat, űrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
- ismeri és alkalmazza a százalékalap, -érték, -láb, -pont fogalmát;
- ismeri a számtani és a mértani sorozat explicit és rekurzív képletét.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló a 9. évfolyam végén:

- ismeri és alkalmazza az egyenes és a fordított arányosságot,
- ismeri és használja a számtani és a mértani sorozat összegképletét.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK A 9. ÉVFOLYAMON

- Az egyenes és a fordított arányosság fogalmának ismerete és alkalmazása gyakorlati problémák megoldása során
- Az egyenes és a fordított arányosság grafikonjának felismerése és elkészítése
- Példák az egyenes és a fordított arányosságtól különböző arányosságokra (négyzetes, gyökök)
- Példák egy irányban vagy ellentétes irányban változó mennyiségpárookra a mindennapi életből
- Százalékszámítással kapcsolatos hétköznapi helyzetekhez (például háztartási bevételekhez, kiadásokhoz, pénzügyi fogalmakhoz, gazdasági folyamatokhoz) és más tantárgyakhoz köthető feladatok megoldása
- Kamatos kamat számolása

FOGALMAK

egyenes arányosság, fordított arányosság, százalékalap, százaléérték, százalékláb, kamat, kamatos kamat

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Összetett, valódi élethelyzetekkel kapcsolatos feladatok megoldása csoportmunkában, szükség esetén grafikon segítségével
- Háztartási számlák elemzése az azokon megjelenő egységárak és fizetendő összegek figyelembevételével
- Hiteltörlesztési feladatok

TÉMAKÖR: Elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek, lineáris algebra

JAVASOLT ÓRASZÁM: 30 óra (15 + 15 óra)

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
- adott problémához megoldási stratégiát, algoritmust választ, készíti;
- a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
- a kiválasztott modellben megoldja a problémát;
- a modellben kapott megoldását az eredeti problémába visszahelyettesítve értelmezi, ellenőrzi, és az észszerűségi szempontokat figyelembe véve adja meg válaszát;
- felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot;
- egyenletek megoldását behelyettesítéssel, értékkészlet-vizsgálattal ellenőrzi;
- lineáris egyenletrendszert megold.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló

a 9. évfolyam végén:

- ismeri és alkalmazza a következő egyenletmegoldási módszereket: mérlegelv, grafikus megoldás, szorzattá alakítás;
- megold elsőfokú egyismeretlenes egyenleteket és egyenlőtlenségeket, elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszereket;

a 10. évfolyam végén

- ismeri a determináns fogalmát;
- Gauss-eliminációval lineáris egyenletrendszert megold.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK A 9. ÉVFOLYAMON

- Elsőfokú egyenletre, egyenlőtlenségre, egyenletrendszerre vezető matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információk kigyűjtése, rendszerezése
- Adott problémához megoldási stratégia, algoritmus választása, készítése
- A problémának megfelelő matematikai modell választása, alkotása
- A kiválasztott modellben a probléma megoldása
- A modellben kapott megoldás értelmezése az eredeti problémába visszahelyettesítve, ellenőrzés és válaszadás az észszerűségi szempontokat figyelembe véve
- Alaphalmaz, megoldáshalmaz fogalmának ismerete
- Egyismeretlenes elsőfokú egyenlet és egyenlőtlenség megoldása mérlegelvel és grafikusán
- Elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása behelyettesítéssel, közös együtthatók módszerével, grafikusán
- Elsőfokú egyenlettel, egyenlőtlenséggel, egyenletrendszerrel megoldható szöveges feladatok megoldása (például út-idő-sebesség, közös munkavégzés, keveréses feladatok, pénzügyi és gazdasági tematikájú feladatok)
- Egyszerű abszolútértékes egyenlet megoldása algebrai és grafikus úton

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK A 10. ÉVFOLYAMON

- Lineárisan összefüggő, független egyenletek
- Gauss-elimináció
- Terület- és térfogatképletek felírása determinánssal

FOGALMAK

- alaphalmaz, megoldáshalmaz, mérlegelv
- determináns
- Gauss-elimináció
- lineárisan összefüggő, lineárisan független

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Szöveges feladatok megoldása több különböző úton, a különböző megoldások összehasonlítása előnyök és hátrányok szempontjából
- Hiányos, túlhatározott, illetve ellentmondó adatokat tartalmazó problémák vizsgálata
- Nyílt végű problémák megoldása
- Adott egyenlethez szöveges feladat alkotása és „feladatküldés” csoportmunkában
- Digitális eszköz használata egyenletek, egyenlőtlenségek és egyenletrendszerek grafikus megoldása során; a digitális eszközzel történő ábrázolás előnyeinek és hátrányainak megbeszélése

TÉMAKÖR: Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, polinomok

JAVASOLT ÓRASZÁM: 30 óra (5 + 25 óra)

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
- adott problémához megoldási stratégiát, algoritmust választ, készíti;
- a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
- a kiválasztott modellben megoldja a problémát;
- a modellben kapott megoldását az eredeti problémába visszahelyettesítve értelmezi, ellenőrzi, és az észszerűségi szempontokat figyelembe véve adja meg válaszát;
- felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot;
- egyenletek megoldását behelyettesítéssel, értékkészlet-vizsgálattal ellenőrzi;
- tud polinomot maradékosan osztani.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló

a 9. évfolyam végén:

- megold másodfokú egyismeretlenes egyenleteket és egyenlőtlenségeket; ismeri és alkalmazza a diszkriminánst, a megoldóképletet és a gyöktényező alakot;

a 10. évfolyam végén:

- ismeri az egészegyütthatós polinomok oszthatóságát.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK A 9. ÉVFOLYAMON

- Másodfokú egyenletre, egyenlőtlenségre vezető matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információk kigyűjtése, rendszerezése
- Egyenletek megoldása ekvivalens átalakításokkal
- Másodfokú egyenlet megoldása szorzattá alakítással, teljes négyzetté kiegészítéssel, megoldóképlettel és grafikusan
- Egyszerű törtes egyenletek megoldása

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK A 10. ÉVFOLYAMON

- Adott problémához megoldási stratégia, algoritmus választása, készítése
- A problémának megfelelő matematikai modell választása, alkotása
- A kiválasztott modellben a probléma megoldása
- A modellben kapott megoldás értelmezése az eredeti problémába visszahelyettesítve, ellenőrzés és válaszadás az észszerűségi szempontokat figyelembe véve
- Egyszerű másodfokúra visszavezethető egyenletek megoldása
- Másodfokú egyenlőtlenség megoldása grafikusan
- Másodfokú egyenlettel megoldható szöveges feladatok megoldása
- $\sqrt{x+c} = ax + b$
- A másodfokú egyenlet diszkriminánsának előjele és az egyenlet megoldásainak száma közötti összefüggés ismerete
- Egyszerű másodfokú egyenletrendszerek megoldása
- Két pozitív szám számtani és mértani közepe közötti összefüggés ismerete, alkalmazása
- Egyszerű másodfokú szélsőérték-feladatok megoldása
- Speciális másodfokú egyenletrendszerek megoldása (pl. a másodfokú tag együtthatója megegyezik)
- Polinomok gyöktényezői
- Gyökök és együtthatók összefüggése

FOGALMAK

másodfokú egyenlet megoldóképlete, diszkrimináns, gyöktényező alak, ekvivalens átalakítás számtani közép, mértani közép, polinom, műveletek polinomokkal

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Másodfokú egyenlet megoldása konkrét együtthatókkal és paraméterekkel, a lépéseket párhuzamosan végezve
- Digitális eszköz használata egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása során
- Tanulói kiselőadás tartása magasabb fokú egyenletek megoldásának történetéről, érdekességeiről
- Hétköznapi életből vett és matematikai szélsőérték-problémák megoldása több módszerrel (függvényábrázolással, algebrai átalakítással, számtani-mértani közép segítségével)

TÉMAKÖR: A függvény fogalma, függvénytulajdonságok, szemléletes analízis

JAVASOLT ÓRASZÁM: 30 óra (15 + 15 óra)

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- képlettel adott függvényt hagyományosan és digitális eszközzel ábrázol;
- adott értékészletbeli elemhez megtalálja az értelmezési tartomány azon elemeit, amelyekhez a függvény az adott értéket rendeli;
- szemléletesen megismerkedik a határérték fogalmával;
- előkészül az analízis tanulására.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló

a 9. évfolyam végére:

- megad hétköznapi életben előforduló hozzárendeléseket;
- adott képlet alapján helyettesítési értékeket számol, és azokat táblázatba rendezi;
- táblázattal megadott függvény összetartozó értékeit ábrázolja koordináta-rendszerben;
- a grafikonról megállapítja függvények alapvető tulajdonságait;
- használja a függvénytranszformációt;
- ismeri a sorozat fogalmát.

a 10. évfolyam végére:

- biztosan használja a hatványozás és a logaritmus azonosságait;

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK 9. ÉVFOLYAMON

- Hétköznapi hozzárendelések megfigyelése, tulajdonságainak megfogalmazása: egyértelmű, kölcsönösen egyértelmű
- Függvény megadása, alapvető függvénytani fogalmak ismerete
- Függvényértékek meghatározása és táblázatba rendezése
- Függvények ábrázolása táblázat alapján
- Függvények alkalmazása valós, hétköznapi helyzetek jellemzésére, gyakorlati problémák megoldására
- A grafikon alapján a függvény értelmezési tartományának, értékészletének, minimumának, maximumának és zérushelyének megállapítása, a növekedés és fogyás leolvasása
- Lineáris függvény, másodfokú függvény, négyzetgyökfüggvény, fordított arányosságot leíró függvény (elemi függvények) grafikonja, tulajdonságai
- Elemi függvényekkel egyszerű függvénytranszformációs lépések végrehajtása: $f(x) + c$, $f(x + c)$, $c \cdot f(x)$, $|f(x)|$
- Lineáris függvények hozzárendelési utasításának leolvasása grafikon alapján
- Egyszerű függvények esetén az $f(x) = c$ alapján x meghatározása és ennek alkalmazása gyakorlati problémák megoldása során

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK 10. ÉVFOLYAMON

- Kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés megfordítása és a megfordított hozzárendelés ábrázolása
- Hatványfüggvények
- Exponenciális függvény

- Logaritmus
- Trigonometrikus függvények és inverzeik
- Sorozatok
- Sorozatok határértéke
- Műveletek és határérték felcserélhetősége

FOGALMAK

egyértelmű hozzárendelés, kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés, értelmezési tartomány, képhalmaz, értékészlet, helyettesítési érték, szélsőérték, zérushely, növekedés, fogyás
konvexitás, sorozat, konvergencia, logaritmus azonosságai

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Összetett, valódi helyzetekkel, például demográfiai kérdésekkel, pénzügyi feladatokkal kapcsolatos grafikonok elemzése csoportmunkában
- Hétköznapi helyzetekben időben változó folyamatokkal kapcsolatos mérések végzése és a mért adatok ábrázolása koordináta-rendszerben (például hőmérséklet)
- A tanulók mindennapi életéhez kapcsolódó grafikonok ábrázolása és elemzése (például út-idő grafikon az iskolába való eljutásról)
- Egyszerű, másodfokú függvénnyel jellemezhető, gyakorlati helyzethez köthető szélsőérték-feladatok megoldása csoportmunkában, például adott hosszúságú spárgával bekeríthető maximális területű téglalap adatainak mérése, megfigyelése
- Függvények ábrázolása digitális eszköz segítségével
- Barkochba játék a függvényekkel kapcsolatos fogalmak használatával
- Szöveges feladatok megoldása grafikus úton
- Algebrai úton nem vagy nehezen megoldható egyenletek közelítő megoldása grafikus úton digitális eszköz segítségével
- Első- és másodrendű rekurzióval megadott sorozatok explicit képlete
- A Fibonacci-sorozat és a természet kapcsolata
- A Fibonacci-sorozat explicit képlete

TÉMAKÖR: Geometriai alapismeretek

JAVASOLT ÓRASZÁM: 8 óra (8 + 0 óra)

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri és feladatmegoldásban alkalmazza a térelemek kölcsönös helyzetét, távolságát és hajlásszögét;
- felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló

a 9. évfolyam végére:

- ismeri és használja a pont, egyenes, sík (térelemek) és szög fogalmát;
- ismeri és alkalmazza a nevezetes szögpárok tulajdonságait;
- ismeri az alapszerkesztéseket, és ezeket végre tudja hajtani hagyományos vagy digitális eszközzel.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK A 9. ÉVFOLYAMON

- Két pont, pont és egyenes, két egyenes távolságának alkalmazása a síkban
- Egyenesek kölcsönös helyzetének ismerete és alkalmazása
- Nevezetes szögpárok tulajdonságainak ismerete és alkalmazása: pótszögek, mellékszögek, kiegészítő szögek, csúcpszögek, egyállású szögek, váltószögek
- A szakaszfelező merőleges és a szögfelező mint pontthalmazok tulajdonságainak ismerete
- Dinamikus geometriai szoftver alkalmazásának előkészítése, használata
- Alapszerkesztések végrehajtása hagyományos vagy digitális eszközzel euklideszi módon: szakaszfelező merőleges, szögfelező, merőleges és párhuzamos egyenesek szerkesztése, szög másolása

FOGALMAK

pont, egyenes, sík, szögtartomány, hajlásszög, párhuzamos, merőleges, pótszögek, mellékszögek, kiegészítő szögek, csúcpszögek, egyállású szögek, váltószögek, szakaszfelező merőleges, szögfelező

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Az osztályteremben vagy a terem környezetében „egyenesek” kölcsönös helyzetének megadása, ezek távolságának megmérése
- Számszerű adatként csak a méretarányt tartalmazó térkép alapján valódi távolságok meghatározása, becslése
- Számszerű adatként csak méretarányt tartalmazó térképen adott helységektől (közelítőleg) egyenlő távolságra levő helységek megkeresése

TÉMAKÖR: Háromszögek, trigonometria

JAVASOLT ÓRASZÁM: 35 óra (20 + 15 óra)

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri a mérés alapelvét, alkalmazza konkrét alap- és származtatott mennyiségek esetén;
- ismeri a hosszúság, terület, térfogat, űrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
- sík- és térgeometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben adja meg válaszát;
- változatos módszerekkel kiszámítja háromszögek területét;

A témakör tanulása eredményeként a tanuló

a 9. évfolyam végére:

- ismeri és alkalmazza a háromszögek oldalai, szögei, oldalai és szögei közötti kapcsolatokat; a speciális háromszögek tulajdonságait;
- ismeri és alkalmazza a háromszög nevezetes vonalaira, pontjaira és köreire vonatkozó fogalmakat és tételeket;
- ismeri és alkalmazza a Pitagorasz-tételt és megfordítását;
- ismeri hegyesszögek szögfüggvényeinek definícióját a derékszögű háromszögben;

- ismeri tompaszögek szögfüggvényeinek származtatását a hegyesszögek szögfüggvényei alapján;
- ismeri a háromszög nevezetes pontjait és vonalait;

a 10. évfolyam végére:

- ismeri a hegyes- és tompaszögek szögfüggvényeinek összefüggéseit;
- alkalmazza a szögfüggvényeket egyszerű geometriai számítási feladatokban;
- a szögfüggvény értékének ismeretében meghatározza a szöget;
- ki tudja számolni a háromszög területét az oldalak ismeretében (Hérón-képlettel);
- ismeri az összefüggéseket a háromszög oldalai és szögei között (szinusz- és koszinusz-tétel);
- ki tudja számolni a háromszög területét két oldal és a köztük lévő szög ismeretében (trigonometrikus területképlet).

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK 9. ÉVFOLYAMON

- A háromszögek csoportosítása oldalak és szögek szerint
- Az alapvető összefüggések ismerete és alkalmazása háromszögek oldalai, szögei, oldalai és szögei között
- Speciális háromszögek tulajdonságainak ismerete és alkalmazása: szabályos, egyenlő szárú, derékszögű háromszög
- A háromszög nevezetes vonalaira, pontjaira és köreire vonatkozó fogalmak, tételek ismerete és alkalmazása: oldalfelező merőleges, szögfelező, magasságvonal, súlyvonal, középvonal, körülírt, illetve beírt kör
- Az oldalfelező merőlegesek és a belső szögfelezők metszéspontjára vonatkozó tétel bizonyítása
- A Pitagorasz-tétel és megfordításának ismerete és alkalmazása
- A Pitagorasz-tétel bizonyítása
- Háromszög területének kiszámítása
- A környezetben található tárgyak magasságának, pontok távolságának meghatározása mért adatokból számítva
- A magasságtétel és a befogótétel ismerete és alkalmazása
- A szögfelezőtétel bizonyítása
- Magasságtétel és befogótétel bizonyítása

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK 10. ÉVFOLYAMON

- Szinusz, koszinusz, tangens értelmezése tetszőleges forgásszög esetén
- Valós számok halmazán értelmezett szögfüggvények ábrázolása, egyszerű transzformációk végrehajtása, a függvények jellemzése
- Meneláosz- és Ceva-tétel
- Hegyeszög szinusza, koszinusza, tangense
- Számítások derékszögű háromszögekben szögfüggvények segítségével gyakorlati helyzetekben
- Tompaszög szinusza, koszinusza, tangense

- Összefüggések ismerete egy adott szög különböző szögfüggvényei között: pitagoraszi összefüggés, pótszögek és mellékszögek szögfüggvényei
- Szögfüggvény értékének ismeretében a szög meghatározása számológép segítségével
- Háromszög területének kiszámítása két oldal és a közbezárt szög ismeretében
- Színusz- és koszinusztétel ismerete és alkalmazása
- A szinusz-tétel bizonyítása
- A koszinusztétel bizonyítása

FOGALMAK

szabályos háromszög, egyenlő szárú háromszög, derékszögű háromszög, oldalfelező merőleges, szögfelező, magasságvonal, súlyvonal, középvonal, körülírt kör, beírt kör hozzáírt kör, súlypont, magasságpont, szögfüggvények szinusz, koszinusz, tangens, szinusz-tétel, koszinusz-tétel szögfelezőtétel, magasságtétel, befogótétel

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- A háromszög nevezetes vonalaira, pontjaira és köreire vonatkozó tételek felfedeztetése szerkesztéssel vagy dinamikus geometriai szoftver alkalmazásával, páros vagy csoportmunkában
- Konkrét alakzatok átdarabolása más alakzattá páros vagy csoportmunkában
- A derékszögű háromszög oldalaira szerkesztett négyzetek átdarabolása a Pitagorasztételnek megfelelő módon, pitagoraszi tangramok vagy dinamikus geometriai szoftver alkalmazásával
- Tanulói kiselőadás a trigonometrikus ismeretek hétköznapi életben, munkában való felhasználhatóságáról, például: lakberendezés, ácsmunka, GPS működése
- Az iskolában vagy annak környezetében kijelölt, tetszőleges háromszög, illetve négyszög alakú részek területének meghatározása csoportmunkában, távolságok és szögek mérése alapján
- Épület magasságának meghatározása a látószög és a távolságok mérésének segítségével csoportmunkában
- Interaktív digitális eszközök használata a valós számok halmazán értelmezett szögfüggvények szemléltetéséhez
- A szögfüggvények szerepének bemutatása a harmonikus rezgőmozgást jellemző mennyiségekben
- A magasságtétel és a befogótétel alkalmazása a nevezetes közepek megszerkesztésére és a köztük fennálló egyenlőségek bizonyítására
- Az Euler-egyenes és a Feuerbach-kör vizsgálata

TÉMAKÖR: Négyszögek, sokszögek

JAVASOLT ÓRASZÁM: 15 óra (8 + 7 óra)

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri a mérés alapelvét, alkalmazza konkrét alap- és származtatott mennyiségek esetén;

- ismeri a hosszúság, terület, térfogat, űrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
- sík- és térgeometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben adja meg válaszát;
- ismeri és alkalmazza speciális négyszögek tulajdonságait, területüket kiszámítja;
- átdarabolással kiszámítja sokszögek területét;
- ismeri a hűrnégyszögek tételét és feladatokban alkalmazza.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló

a 9. évfolyam végére:

- ismeri és alkalmazza a szabályos sokszög fogalmát; kiszámítja a konvex sokszög belső és külső szögeinek összegét;

10. évfolyam végére:

- összetett feladatokat megold

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK A 9. ÉVFOLYAMON

- Speciális négyszögek (trapéz, húrtrapéz, paralelogramma, deltoid, rombusz, téglalap, négyzet) tulajdonságainak ismerete, területének kiszámítása
- Konvex sokszögeknél az átlók számára, a belső és külső szögösszegre vonatkozó tételek ismerete, bizonyítása és alkalmazása
- Szabályos sokszög fogalmának ismerete
- Szabályos sokszög területe átdarabolással

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK A 10. ÉVFOLYAMON

- Hűrnégyszögek tulajdonságai
- Számítások négyszögekben, sokszögekben szögfüggvények segítségével

FOGALMAK

trapéz, húrtrapéz, paralelogramma, deltoid, rombusz, téglalap, négyzet, konvex sokszög, szabályos sokszög, hűrnégyszög

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Különböző típusú speciális négyszögek területének meghatározására vonatkozó formula felfedeztetése átdarabolással
- A belső és a külső szögösszegre vonatkozó tételek felfedeztetése, illusztrálása átdarabolással, hajtogatással vagy dinamikus geometriai szoftver segítségével
- Projektmunka: lakás/iskola alaprajzának elkészítése méretarányosan
- Hűrnégyszögek vizsgálata dinamikus geometriai szoftver segítségével
- Ptolemaiosz tétele hűrnégyszögekre

TÉMAKÖR: A kör és részei

JAVASOLT ÓRASZÁM: 15 óra (10 + 5 óra)

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri a mérés alapelvét, alkalmazza konkrét alap- és származtatott mennyiségek esetén;
- ismeri a hosszúság, terület, térfogat, űrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
- sík- és térgeometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben adja meg válaszát.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló

a 9. évfolyam végére:

- ki tudja számolni a kör és részeinek kerületét, területét;
- ismeri a kör érintőjének fogalmát, kapcsolatát az érintési pontba húzott sugárral;
- ismeri és alkalmazza a Thalész-tételt és megfordítását;

a 10. évfolyam végére:

- ismeri és alkalmazza a kerületi és középponti szögek tételét;
- ismeri a pont körre vonatkozó hatványának fogalmát és feladatokban alkalmazza.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK A 9. ÉVFOLYAMON

- Annak ismerete és alkalmazása, hogy a középponti szög egyenesen arányos a hozzá tartozó körív hosszával
- Annak ismerete és alkalmazása, hogy a középponti szög egyenesen arányos a hozzá tartozó körcikk területével
- Kör, körcikk, körgyűrű és körszelet területének és kerületének kiszámítása
- Annak ismerete és alkalmazása, hogy a kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, és hogy külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak
- A Thalész-tétel és megfordításának ismerete és alkalmazása
- A Thalész-tétel bizonyítása
- Szög mérése ívmértékkel; fok és ívmérték közti kapcsolat ismerete, alkalmazása
- A Thalész-tétel megfordításának bizonyítása

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK A 10. ÉVFOLYAMON

- Kerületi és középponti szögek tételének bizonyítása
- Pont körre vonatkozó hatványa
- Körre vonatkozó inverzió

FOGALMAK

középponti szög, körív, körcikk, körgyűrű, körszelet, érintőszakaszok
ívmérték, radián

kerületi szög, pont körre vonatkozó hatványa, inverzió

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Annak felfedeztetése méréssel, hogy a középponti szög egyenesen arányos a hozzá tartozó körív hosszával; különböző méretű körök esetén a kapott adatok táblázatba foglalása

- A Thalész-tétel felfedeztetése szerkesztéssel, szögméréssel vagy dinamikus geometriai szoftver alkalmazásával
- Trimino alkalmazása a fok és az ívmérték közötti kapcsolat játékos gyakorlására
- Annak felfedeztetése méréssel, hogy adott húrhoz tartozó kerületi szög mindig ugyanakkora
- Sztereografikus projekció tulajdonságainak vizsgálata
- Inverzió alkalmazása feladatokban

TÉMAKÖR: Transzformációk, szerkesztések

JAVASOLT ÓRASZÁM: 30 óra (16 + 14 óra)

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri a vektorokkal kapcsolatos alapvető fogalmakat;
- ismer és alkalmaz egyszerű vektorműveleteket;
- alkalmazza a vektorokat feladatok megoldásában;
- ismeri és alkalmazza a hasonló síkidomok kerületének és területének arányára vonatkozó tételeket.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló

a 9. évfolyam végére:

- ismer példákat geometriai transzformációkra;
- ismeri és alkalmazza a síkbeli egybevágósági transzformációkat és tulajdonságaikat; alakzatok egybevágóságát;
- ismeri és alkalmazza a középpontos hasonlósági transzformációt, a hasonlósági transzformációt és az alakzatok hasonlóságát;
- megszerkeszti egy alakzat tengelyes, illetve középpontos tükörképét, pont körüli elforgatottját, párhuzamos eltolját hagyományosan és digitális eszközzel;

a 10. évfolyam végére:

- geometriai szerkesztési feladatoknál vizsgálja és megállapítja a szerkeszthetőség feltételeit;
- ismeri a geometriai transzformációk kompozíciójának fogalmát;
- ismeri és használja a forgatva nyújtást feladatokban.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK 9. ÉVFOLYAMON

- Példák ismerete geometriai hozzárendelésekre (merőleges vetítés, párhuzamos vetítés, merőleges affinitás, térkép, fényképezés)
- A tengelyes tükrözés, a középpontos tükrözés, a pont körüli forgatás és a párhuzamos eltolás ismerete, tulajdonságaik
- A vektor fogalmának kialakítása a párhuzamos eltolás segítségével
- Egybevágósági transzformációk egymás utáni végrehajtása
- Egybevágósági transzformációk végrehajtása szerkesztéssel vagy digitális eszközzel
- Egybevágó alakzatok, szimmetriák megfigyelése a környezetben, művészeti alkotásokban

- Az egybevágósági transzformációk alkalmazása feladatok megoldásában, tételek bizonyításában
- Háromszögek egybevágóságának alapesetei és ezek alkalmazása
- Négyszögek egybevágósága
- Egyszerű szerkesztési feladatok megoldása hagyományos vagy digitális eszközzel; diszkusszió
- Gyakorlati feladatok megoldása egybevágóságok segítségével (például a sík parkettázása különféle síkidomokkal; szabásminta készítése, használata)
- A középpontos hasonlósági transzformáció és a hasonlósági transzformáció ismerete, tulajdonságai
- A hasonlóság fogalmának ismerete és alkalmazása feladatok megoldásában, tételek bizonyításában

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK 10. ÉVFOLYAMON

- Gyakorlati feladatok megoldása hasonlóság segítségével (például alaprajz-, térképkészítés, modellezés)
- Minden egybevágósági transzformáció előáll legfeljebb három tengelyes tükrözés egymásutánjaként
- Forgatva nyújtás ismerete és alkalmazása feladatokban

FOGALMAK

tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés, pont körüli forgatás, párhuzamos eltolás, egybevágóság, forgásszög, vektor, vektorok összege, középpontos hasonlósági transzformáció, hasonlósági transzformáció, hasonlóság, a hasonlóság aránya
forgatva nyújtás, geometriai transzformációk kompozíciója

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Gyakorlati példák keresése geometriai hozzárendelésekre, például fényképezés, filmvetítés
- A középpontos tükrözés, a pont körüli forgatás és a párhuzamos eltolás bemutatása mint két tengelyes tükrözés egymásutánja
- M. C. Escher és Victor Vasarely néhány interneten is elérhető alkotásának elemzése a szimmetriák szempontjából; hasonló módszerrel képek alkotása
- A sík parkettázása egybevágó háromszögekkel, négyszögekkel papírsablonok vagy dinamikus geometriai szoftver segítségével
- A tengelyes vagy középpontos szimmetriára alapozó stratégiai játékok (például pénzforgató, színezős) páros munkában
- Az iskola közelében lévő magas épület (például templomtorony) magasságának meghatározása egy egyenes bot segítségével a bot és az épület árnyékának méréséből („Thalész-módszer”) csoportmunkában
- Valódi távolságok, valódi útvonalak hosszának meghatározása papíralapú térkép alapján
- Alakzatok transzformációcsoportja (pl. szabályos háromszög, négyzet, téglalap, szabályos tetraéder)
- Szöget, ill. egyenest nem tartó transzformációk (affinitás, inverzió)

TÉMAKÖR: Leíró statisztika

JAVASOLT ÓRASZÁM: 10 óra (10 + 0 óra)

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- adott cél érdekében tudatos adatgyűjtést és rendszerezést végez;
- hagyományos és digitális forrásból származó adatsokaság alapvető statisztikai jellemzőit meghatározza, értelmezi és értékeli;
- felismer grafikus manipulációkat diagramok esetén.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló

a 9. évfolyam végére:

- adatsokaságból adott szempont szerint oszlop- és kördiagramot készít hagyományos és digitális eszközzel.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK 9. ÉVFOLYAMON

- Statisztikai adatok gyűjtésének tervezése
- Statisztikai adatok gyűjtése hagyományos és internetes forrásból
- Statisztikai adatok rendszerezése, jellemzése középértékekkel hagyományos és digitális eszközzel
- A kapott adatok értelmezése, értékelése, egyszerű statisztikai következtetések
- Oszlop- és kördiagram értelmezése, valamint készítése hagyományos és digitális eszközzel
- Konkrét adatsokaság ábrázolásához, statisztikai kérdés megválaszolásához a megfelelő diagramtípus kiválasztása
- Kördiagramból oszlopdigram készítése és viszont
- Grafikus manipulációk felismerése és javítása diagramok esetén
- A középértékek tulajdonságainak és alkalmazhatóságának ismerete

FOGALMAK

oszlopdigram, kördiagram, átlag, medián, módusz

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Adatgyűjtés megtervezése, például forgalomszámlálás vagy iskolai felmérés előkészítése
- A megtervezett statisztikai adatgyűjtés lebonyolítása, az eredmények szemléltetése grafikonok segítségével, a kapott eredmények értékelő bemutatása tanulói kiselőadás formájában
- Különböző adatsokaságok esetében annak vizsgálata, hogy ezek jellemezhetők-e az ismert középértékekkel
- Érvelés a tanuló saját érdemjegyei alapján különböző statisztikai jellemzők segítségével a kedvezőbb év végi jegyért
- Különböző sportágak értékelési rendszerének és statisztikáinak bemutatása tanulói kiselőadás keretében
- Osztályok/tantárgyak eredményeinek összehasonlítása érdemjegyek és ezek középértékei alapján

- Csoportmunka keretében adott céllal készülő, megtévesztő oszlop- és kördiagramok készítése, ezek szóbeli értékelése, javítása

TÉMAKÖR: Valószínűségszámítás

JAVASOLT ÓRASZÁM: 20 óra (0 + 20 óra)

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- konkrét valószínűségi kísérletek esetében az esemény, eseménytér, elemi esemény, relatív gyakoriság, valószínűség, egymást kizáró események, független események fogalmát megkülönbözteti és alkalmazza;
- gyakorlati problémákra valószínűségszámítási modelleket tud felállítani;
- a függetlenség valószínűségelméleti megközelítését, a fogalomalkotás nehézségeit és érdekességeit megismeri;
- a valószínűség fogalmát „nem tudásunk mértéke”-ként is tudja értelmezni.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló

a 10. évfolyam végére:

- tapasztalatai alapján véletlen jelenségek jövőbeni kimenetelére észszerűen tippel;
- véletlen kísérletek adatait rendszerezi, relatív gyakoriságokat számol, nagy elemszám esetén számítógépet alkalmaz,
- valószínűségi változók várható értékét és legvalószínűbb értékét (móduszát) magabiztosan megkülönbözteti, a helyzetnek megfelelően alkalmazza;
- a várható érték additív tulajdonságát felhasználja feladatok megoldásában;
- fel tudja használni ismereteit egyszerű játékelméleti feladatok megoldásában.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK 10. ÉVFOLYAMON

- Valószínűségi kísérletek elvégzése, gyakorisági, relatív gyakorisági táblázatok készítése
- A valószínűség fogalmának bevezetése statisztikai alapon
- A klasszikus valószínűségi modell fogalma és alkalmazása
- Diszkrét valószínűség-eloszlások ábrázolása hagyományos és digitális eszközzel
- Feltételes valószínűség fogalma és alkalmazásai
- Események függetlenségének fogalma
- A várható érték additív tulajdonsága
- Binomiális és hipergeometrikus eloszlás, ezek várható értékének kiszámítása (egyszerűbb, majd általános paraméterek mellett)

FOGALMAK

valószínűségi kísérlet, esemény, elemi esemény, gyakoriság, relatív gyakoriság, valószínűség, diszkrét valószínűség-eloszlás

feltételes valószínűség, független események, diszkrét valószínűségi változó, binomiális eloszlás, hipergeometrikus eloszlás

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Konkrét valószínűségi kísérletek végrehajtása vagy dinamikus szoftver segítségével történő szimulálása (például dobások szabályos dobókockákkal, pénzérmékkel); a kapott

gyakoriságok és relatív gyakoriságok táblázatba foglalása; tippelés az egyes kimenetekre és becslés a bekövetkezésük valószínűségére

- Játékokban a szerencsefaktor vizsgálata, például „Ki nevet a végén” játék esetében az első hatos dobás eloszlása
- Különböző társasjátékokban stratégia meghatározása, döntéshozatal esélylatolgatás alapján
- Különböző szerencsejátékok (lottó, totó, póker, black jack, internetes sportfogadások) esetében a nyerési esély összehasonlítása

11–12. évfolyam

A 11–12. évfolyamon a tanulási-tanítási folyamatra jellemző, hogy az ismeretek jellege egyre absztraktabb és formálisabb, a matematika belső logikája egyre jobban érvényesül. Ebben a szakaszban az egyik nagyon fontos didaktikai cél a szimbolikus gondolkodás fejlesztése. A tanulóknak a korábban elsajátított készségekre, képességekre és ismeretanyagra támaszkodva kell eljutniuk az absztrakt összefüggések megértéséhez és tudatos alkalmazásához. Tudatosítani kell a matematikai fogalmak pontos definiálásának fontosságát és a matematikai bizonyítások szerepét. Amellett, hogy a lehetséges alkalmazásokat minden egyes témakör kapcsán szem előtt kell tartani, fontos, hogy a tanulók lássák az egyes matematikai területek kapcsolatát is.

Fontos cél, hogy az ismeretszerzési folyamat során a tanuló a tanár által irányított módon, a feladatok megoldása mentén maga fedezze fel az összefüggéseket, általánosítási lehetőségeket, megoldási módokat. A kooperatív munkaformák, a projektfeladatok ebben a szakaszban is fejlesztik a kommunikációt. Az érettségi vizsgára készülés során egyre nagyobb hangsúlyt kap a tanulók önálló munkája mind a feladatmegoldásokban, mind a tanultak ismétlésében, rendszerezésében. A digitális eszközök támogatják a szemléltetést, a megértést, a felfedeztetést és a gyakorlást.

Bizonyos témakörök ebben a szakaszban jelennek meg először. Ilyen a racionális kitevőjű hatvány, az exponenciális függvény, a logaritmus, az analízis elemei (deriválás, integrálás), a koordinátageometria és az axiomatikus és projektív geometria. Az algebrai eszközök és a függvényekkel kapcsolatos ismeretek bővülése, a koordinátageometria alapjainak megjelenése, valamint a statisztikai és valószínűségi szemlélet mélyülése további lehetőségeket nyújt változatos hétköznapi és matematikai problémák megoldására. A matematikai eszköztár bővülése ebben a szakaszban teszi leginkább lehetővé, hogy a tanulók más tantárgyakban, más tanulási területeken is alkalmazni tudják matematikai tudásukat.

A 11–12. évfolyamon a matematika tantárgy javasolt óraszám 372 óra. Rendszerező összefoglalásra, az érettségi vizsgára történő felkészítésre a 12. évfolyam végén 60 óra áll rendelkezésre. Az egyes témakörökhöz írt óraszámok javaslatok. Az új ismeretek a teljes óraszám négyötöd része alatt a legtöbb tanuló számára elsajátíthatók, így a fennmaradó órák felhasználhatók ismétlésre, gyakorlásra, felzárkóztatásra, tehetséggondozásra és számonkérésre.

A témakörök áttekintő táblázata:

Témakör neve	Javasolt óraszám
Halmazok, matematikai logika	<u>40</u>
Kombinatorika, gráfok és algoritmusok	<u>36</u>
Számelméleti ismeretek, számhalmazok épülése	<u>30</u>
Hatvány, gyök, exponenciális függvény, logaritmus	<u>18</u>
Exponenciális folyamatok vizsgálata	<u>10</u>
Sorozatok, <u>függvények, analízis</u>	<u>70</u>
Trigonometria	<u>20</u>
Térgeometria, <u>axiomatikus és projektív geometria</u>	<u>30</u>
Koordinátageometria	<u>30</u>
Leíró statisztika	<u>8</u>

Valószínűségszámítás	<u>20</u>
Rendszerező összefoglalás	<u>60</u>
Összes óraszám:	<u>372</u>

TÉMAKÖR: Halmazok, matematikai logika

JAVASOLT ÓRASZÁM: 40 óra

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- látja a halmazműveletek és a logikai műveletek közötti kapcsolatokat;
- megállapítja egyszerű „ha ... , akkor ...” és „akkor és csak akkor” típusú állítások logikai értékét;
- tud egyszerű állításokat indokolni és tételeket bizonyítani;
- megkülönböztet megszámlálható és nem megszámlálható halmazokat;
- megfogalmaz számossági érveken alapuló egzisztencia-bizonyításokat;
- megalapozott képpel rendelkezik a valós számok halmazáról, ismeri a fogalomalkotás nehézségeit.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A halmazműveletek és a logikai műveletek közötti kapcsolatok bemutatása példákon keresztül
- Logikai kifejezések megfelelő használata
- Egyszerű állítások indoklása, tételek bizonyítása
- Stratégiai és logikai játékok
- Megszámlálható végtelen és kontinuum számosság
- Megszámlálhatóan sok megszámlálható halmaz uniója is megszámlálható
- Cantor átlós módszere
- A racionális, az irracionális, az algebrai és a transzcendens számok halmazának számossága
- A számosságok körében értelmezett kisebb/nagyobb fogalom tulajdonságai,
- A kontinuum-hipotézis
- Valós számok axiómarendszere, az arkhimédészi és a Cantor-axióma szerepe

FOGALMAK

logikai műveletek

halmazok számossága, algebrai számok, transzcendens számok, kontinuum számosság, arkhimédészi axióma, Cantor-axióma

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- A tanulók mindennapi tapasztalataihoz köthető, összetett állítások logikai értékének meghatározása igazságtáblázat segítségével
- Rejtvényújságokban szereplő feladványok megfejtése következtetések láncolatán keresztül
- Logikai készséget fejlesztő játékok, például „Einstein-fejtörő”
- Stratégiai játékok, például NIM játékok, táblás játékok
- Tudatos pénzügyi tervezést segítő játékok

- A naiv halmazelmélet korlátainak bemutatása a Russell-paradoxon segítségével
- Bijekciók létesítése a sík és tér érdekes részhalmazai között
- A Cantor-halmaz vizsgálata

TÉMAKÖR: Kombinatorika, gráfok és algoritmusok

JAVASOLT ÓRASZÁM: 20 óra

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
- a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
- a kiválasztott modellben megoldja a problémát.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- megold sorba rendezési és kiválasztási feladatokat;
- konkrét szituációkat szemléltet és egyszerű feladatokat megold gráfok segítségével.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Matematikai és hétköznapi helyzetekhez kötődő sorba rendezési és kiválasztási feladatok megoldása
- A binomiális együttható fogalmának ismerete, értékének kiszámítása
- Mintavétel visszatevéssel és visszatevés nélkül
- A gráf csúcsainak fokszámösszege és éleinek száma közötti összefüggés ismerete és alkalmazása gyakorlati feladatok megoldásában
- Kombinatorikai feladatok megoldása a komplementer esetek meghatározásának segítségével
- Turán-tétel és egyéb extrémális gráfelméleti problémák
- Hamilton-kör létezésére vonatkozó elégséges feltételek
- Síkba rajzolható gráfok és az Euler-féle poliédertétel
- Végtelen gráf fogalma

FOGALMAK

faktoriális, binomiális együttható; csúcs fokszáma gráfban

Hamilton-kör

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Anagramma készítése a tanulók neveiből
- A pókerben előforduló lehetséges nyerő lapkombinációk számának meghatározása
- A Pascal-háromszög és tulajdonságai felfedeztetése például kéttagú összeg hatványaiban szereplő együtthatók segítségével
- Különböző szituációk kétféle módon történő összeszámlálása és ebből következő egyszerű kombinatorikus összefüggések felfedezése
Visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel konkrét lejátszása, a tapasztalatok összegyűjtése

- Végtelen gráfok értelmezési lehetőségeinek vizsgálata (pl. mit jelent egy út vagy egy kör egy végtelen gráfban; lehetnek-e végtelen hosszúak)

TÉMAKÖR: Számelméleti ismeretek, számhalmazok épülése

JAVASOLT ÓRASZÁM: 30 óra

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- ismeri és alkalmazza az oszthatóság alapvető fogalmait;
- összetett számokat felbont prímszámok szorzatára;
- meghatározza két természetes szám legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét, és alkalmazza ezeket egyszerű gyakorlati feladatokban;
- ismeri és alkalmazza az oszthatósági szabályokat;
- érti a helyi értékes írásmódot 10-es és más alapú számrendszerekben;
- ismeri a számhalmazok épülésének matematikai vonatkozásait a természetes számoktól a valós számokig;
- ismer példákat irracionális számokra;
- konkrét kis modulusok esetén meg tudja határozni a kvadratikusan maradékokat;
- ismeri és alkalmazza a kínai maradéktételt.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös meghatározása a prímtényezőszorzat felbontásból
- Összetett oszthatósági szabályok alkalmazása
- Számolás osztási maradékokkal (például összeg, szorzat, hatvány maradéka)
- Számok felírása 10-estől különböző alapú számrendszerben
- Az egész számok, a véges tizedes törtek, a végtelen szakaszos tizedes törtek és a racionális számok kapcsolata
- A számhalmazok épülésének matematikai vonatkozásai a természetes számoktól a valós számokig
- Végtelen nem szakaszos tizedes törtek ismerete
- Példák irracionális számokra
- Számhalmazok műveleti zártága
- A számelmélet alaptételének bizonyítása [elemzés] példák más gyűrűkre, ahol a bizonyítás valamelyik lépése nem megy. Euler-egészek. Prím azonos a felbonthatatlannal az egészek gyűrűjében.
- Elem rendje modulo m osztója $\phi(m)$ -nek.
- A $4k + 1$ alakú prímekekre az $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ kongruencia megoldható, a $4k - 1$ alakúakra nem.
- Az n -nél kisebb prímekek szorzatának becslése
- Csebisev tétele
- A prímekek reciprokösszege divergens
- Minkowski-tétel

FOGALMAK

természetes szám, egész szám, racionális szám, irracionális szám, valós szám, relatív prímek
kvadratikus maradék, lánctört, Pell-egyenlet

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Oszthatósággal kapcsolatos „bűvésztükkök” bemutatása
- Számrendszerek segítségével megoldható rejtvények
- Tanulói kiselőadás a 10-estől különböző alapú számrendszerek használatáról a múltban és ennek mai napig tartó hatásairól
- Tanulói kiselőadás számelméleti érdekességekről, például tökéletes számok és barátságos számpárok, prímszámok, jelenleg ismert legnagyobb prím, titkosítás
- Halmazábra elkészítése a számhalmazokról
- \sqrt{n} hosszú szakasz szerkesztési eljárásának bemutatása
- A tanult tételek felhasználása változatos feladatokban; pl. végtelen sok $4k + 1$, $6k + 1$, $8k \pm 1$, $8k \pm 3$ alakú prím van
- Titkosírás. Prímszámtesztek
- Pell-egyenletek kapcsolata a lánctörtekkel
- Számelmélet a Gauss egészek körében

TÉMAKÖR: Hatvány, gyök, exponenciális függvény, logaritmus

JAVASOLT ÓRASZÁM: 18 óra

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri és alkalmazza a logaritmus fogalmát.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- ismeri és alkalmazza az n-edik gyök fogalmát;
- ismeri és alkalmazza a racionális kitevőjű hatvány fogalmát és a hatványozás azonosságait;
- képlettel adott függvényt hagyományosan és digitális eszközzel ábrázol;
- adott értékészletbeli elemhez megtalálja az értelmezési tartomány azon elemeit, amelyekhez a függvény az adott értéket rendeli.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Az n-edik gyök fogalmának ismerete és alkalmazása
- Hatványozás pozitív alap és racionális kitevő esetén
- Hatványozás azonosságainak alkalmazása racionális kitevő esetén
- A hatványozás szemléletes értelmezése irracionális kitevő esetén
- Az exponenciális függvények ábrázolása hagyományosan és számítógéppel, a függvények tulajdonságai
- A logaritmus értelmezése
- Áttérés más alapú logaritmusra
- Számológép használata logaritmus értékének meghatározásához
- A logaritmus azonosságai
- A logaritmus függvény ábrázolása, tulajdonságai
- Egyszerű exponenciális és logaritmusos egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása

- Összetett exponenciális és logaritmosus egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása

FOGALMAK

n-edik gyök, exponenciális függvény, logaritmus

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- A permanencia-elv gyakorlati „kipróbálása” a definíció megadása előtt
- Matematikatörténeti érdekességek (például déloszi probléma) feldolgozása projektmunkában
- Különböző alapú exponenciális függvények ábrázolása milliméterpapíron, és a kapott grafikonok összehasonlítása csoportmunkában
- Nagy számok számjegyei számának meghatározása logaritmus segítségével
- 10-estől eltérő alapú logaritmus kiszámolása csak 10-es alapú logaritmus kiszámolására alkalmas számológéppel
- Annak bemutatása, hogy a logaritmus segítségével hogyan lehet számok szorzását számok összeadására visszavezetni
- A logaritmus-táblázat és a logarléc mint matematikatörténeti érdekességek megismertetése
- A témakörhöz tartozó nehezebb feladatok, versenyfeladatok megoldása

TÉMAKÖR: Exponenciális folyamatok vizsgálata

JAVASOLT ÓRASZÁM: 10 óra

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
- ismeri és alkalmazza a logaritmus fogalmát.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- adott problémához megoldási stratégiát, algoritmust választ, készít;
- a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
- a kiválasztott modellben megoldja a problémát;
- a modellben kapott megoldását az eredeti problémába visszahelyettesítve értelmezi, ellenőrzi, és az észszerűségi szempontokat figyelembe véve adja meg válaszát;
- egyenletek megoldását behelyettesítéssel, értékkészlet-vizsgálattal ellenőrzi;
- megold egyszerű, a megfelelő definíció alkalmazását igénylő exponenciális egyenleteket, egyenlőtlenségeket;
- megold összetettebb exponenciális egyenleteket, egyenlőtlenségeket.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Exponenciális folyamatok vizsgálata a természetben és a társadalomban
- Exponenciális egyenletre, egyenlőtlenségre vezető matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információk kigyűjtése, rendszerezése
- Adott problémához megoldási stratégia, algoritmus választása, készítése

- A gyakorlati (például pénzügyi, biológiai, fizikai, demográfiai, ökológiai) problémának megfelelő matematikai modell választása, alkotása
- A kiválasztott modellben a probléma megoldása
- A modellben kapott megoldás értelmezése az eredeti probléma szövegébe visszahelyettesítve, ellenőrzés és válaszadás az észszerűségi szempontokat figyelembe véve

FOGALMAK

Nincsenek új fogalmak.

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Tanulói kiselőadás az exponenciálisan változó folyamatokról a természetben és a társadalomban
- Adatgyűjtés különböző forrásokból származó, exponenciális vagy közelítőleg annak tekinthető változókra csoportmunkában
- Gyakorlati, időben exponenciálisnak tekinthető változást mutató grafikonokra exponenciális függvény illesztése digitális eszköz segítségével, és az illesztett függvény paramétereinek értelmezése
- Összetett exponenciális és logaritmusos egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása

TÉMAKÖR: Sorozatok, függvények, analízis

JAVASOLT ÓRASZÁM: 90 óra

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri és alkalmazza a logaritmus fogalmát;
- ismeri végtelen sorozatok tulajdonságait;
- ismeri függvények határértékének és folytonosságának fogalmát;
- ismeri a határozatlan és határozott integrál fogalmát;
- teljes függvényvizsgálatot tud végezni a tanult függvények körében.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- számtani és mértani sorozatokat adott szabály alapján felír, folytat;
- a számtani/mértani sorozat n-edik tagját felírja az első tag és a különbség (differencia)/hányados (kvóciens) ismeretében;
- a számtani/mértani sorozatok első n tagjának összegét kiszámolja;
- ismeri és alkalmazza a százalékalap, -érték, -láb, -pont fogalmát;
- mértani sorozatokra vonatkozó ismereteit használja gazdasági, pénzügyi, természettudományi és társadalomtudományi problémák megoldásában;
- megállapítja konvergens sorozatok véges és végtelen határértékét;
- a tanult függvények körében meghatározza a derivált függvényt;
- a tanult függvényeket tudja integrálni.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A számsorozat fogalmának ismerete
- Számsorozat megadása képlettel, rekurzióval
- Számtani és mértani sorozatok felírása, folytatása adott szabály szerint

- Számtani sorozat, az n -edik tag, az első n tag összege
- Mértani sorozat, az n -edik tag, az első n tag összege
- A számtani és a mértani sorozat első n tagjának összegére vonatkozó képlet bizonyítása
- Számtani és mértani sorozatokra vonatkozó ismeretek alkalmazása gazdasági, természettudományi és társadalomtudományi problémák megoldásában
- Megtakarítási és kamatozási formák, ezek összehasonlítása
- Egyszerű kamat, kamatos kamat, gyűjtőjárdék és törlesztőrészlet számítása
- Megtakarítási, befektetési és hitelfelvételi lehetőségekkel és azok kockázati tényezőivel kapcsolatos feladatok megoldása
- Változatos példák sorozatokra, tulajdonságok, monotonitás, konvergencia meghatározása
- Sorozatok korlátossága, torlódási pont, határérték
- Függvény határértékének meghatározása
- Polinomfüggvények, trigonometrikus függvények, exponenciális és logaritmusfüggvények differenciálása
- Deriválási szabályok, összeg, szorzat, hányados, kompozíció
- Függvények konvexitása
- Határozatlan integrál ismerete
- Newton–Leibniz-formula ismerete és alkalmazása
- integrálási szabályok ismerete és alkalmazása
- Parciális törtekre bontás, helyettesítéses integrál

FOGALMAK

számsorozat, tőke, kamatláb, kamat, futamidő, gyűjtőjárdék, törlesztőrészlet
határérték, folytonosság, derivált, primitív függvény, integrál

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Tanulói kiselőadás tartása nevezetes sorozatokról, például Fibonacci-sorozat
- Az első 100 pozitív természetes szám összegének meghatározása a „kis” Gauss módszerével
- A sakktáblára elhelyezett, mezőről mezőre kétszeres számú búzaszemek kérdésének bemutatása
- Valódi pénzügyi termékek kamatozási és egyéb feltételeinek összehasonlítása csoportmunkában internetes adatgyűjtés segítségével
- Szélsőérték-feladatok megoldása analitikus eszközökkel
- Teljes függvényvizsgálat
- Integrálszámítás alkalmazása terület, térfogat és felszínszámításra, súlypont helyének meghatározása, ívhossz és tehetetlenségi nyomaték meghatározása

TÉMAKÖR: Trigonometria

JAVASOLT ÓRASZÁM: 20 óra

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- sík- és térgeometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben adja meg válaszát;
- változatos módszerekkel kiszámítja háromszögek területét;
- átismételje és alkalmazza a 9-10. évfolyamokon tanultakat, új ismereteket szerezzen.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- ismeri és alkalmazza a háromszögek oldalai, szögei, oldalai és szögei közötti kapcsolatokat; a speciális háromszögek tulajdonságait;
- ismeri és alkalmazza a háromszög nevezetes vonalaira, pontjaira és köreire vonatkozó fogalmakat és tételeket;
- ismeri hegyesszögek szögfüggvényeinek definícióját a derékszögű háromszögben;
- ismeri tompaszögek szögfüggvényeinek származtatását a hegyesszögek szögfüggvényei alapján;
- ismeri a hegyes- és tompaszögek szögfüggvényeinek összefüggéseit;
- alkalmazza a szögfüggvényeket összetett geometriai számítási feladatokban;
- a szögfüggvény értékének ismeretében meghatározza a szöget;
- ismeri a háromszög nevezetes pontjait és vonalait;
- ki tudja számolni a háromszög területét az oldalak ismeretében (Hérón-képlettel);
- ismeri az összefüggéseket a háromszög oldalai és szögei között (szinusz- és koszinusz-tétel);
- ki tudja számolni a háromszög területét két oldal és a köztük lévő szög ismeretében (trigonometrikus területképlet).

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A háromszögek csoportosítása oldalak és szögek szerint
- Az alapvető összefüggések ismerete és alkalmazása háromszögek oldalai, szögei, oldalai és szögei között
- Speciális háromszögek tulajdonságainak ismerete és alkalmazása: szabályos, egyenlő szárú, derékszögű háromszög
- A háromszög nevezetes vonalaira, pontjaira és köreire vonatkozó fogalmak, tételek ismerete és alkalmazása: oldalfelő merőleges, szögfelező, magasságvonal, súlyvonal, középvonal, körülírt, illetve beírt kör
- Az oldalfelő merőlegesek és a belső szögfelezők metszéspontjára vonatkozó tétel bizonyítása
- Háromszög területének kiszámítása
- Szinusz, koszinusz, tangens értelmezése tetszőleges forgásszög esetén
- Valós számok halmazán értelmezett szögfüggvények ábrázolása, összetett transzformációk végrehajtása, a függvények jellemzése
- Magasságtétel és befogótétel bizonyítása
- Meneláosz- és Ceva-tétel
- Hegyeszög szinusza, koszinusza, tangense
- Számítások derékszögű háromszögekben szögfüggvények segítségével gyakorlati helyzetekben
- Tompaszög szinusza, koszinusza, tangense

- Összefüggések ismerete egy adott szög különböző szögfüggvényei között: pitagorasz-i összefüggés, pótszögek és mellékszögek szögfüggvényei
- Szögfüggvény értékének ismeretében a szög meghatározása számológép segítségével
- Háromszög területének kiszámítása két oldal és a közbezárt szög ismeretében
- Színusz- és koszinusztétel ismerete és alkalmazása
- A színusztétel bizonyítása
- A koszinusztétel bizonyítása
- A trigonometrikus Ceva-tétel bizonyítása

FOGALMAK

szabályos háromszög, egyenlő szárú háromszög, derékszögű háromszög, oldalfelező merőleges, szögfelező, magasságvonal, súlyvonal, középvonal, körülírt kör, beírt kör hozzáírt kör, súlypont, magasságpont, szögfüggvények
színusz, koszinusz, tangens, színusztétel, koszinusztétel
szögfelezőtétel, magasságtétel, befogótétel

trigonometrikus Ceva-tétel

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Az eddigi ismeretek átisméltése csoportmunkában
- A Pitagorasz-tétel különböző bizonyításainak gyűjtése
- Tanulói kiselőadás a trigonometrikus ismeretek hétköznapi életben, munkában való felhasználhatóságáról, például: lakberendezés, ácsmunka, GPS működése, hátrametszés
- Interaktív digitális eszközök használata a valós számok halmazán értelmezett szögfüggvények szemléltetéséhez, tulajdonságainak bizonyításához
- A szögfüggvények szerepének bemutatása a harmonikus rezgőmozgást jellemző mennyiségekben
- Brocard-pont, Nagel-pont, izogonális pont
- Az Euler-egyenes és a Feuerbach-kör vizsgálata
- Gömbi háromszögek vizsgálata, összehasonlító geometria
- Trigonometrikus Ceva-tétel

TÉMAKÖR: Térgeometria, axiomatikus és projektív geometria

JAVASOLT ÓRASZÁM: 30 óra

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri és alkalmazza a színusz- és a koszinusztételt;
- ismeri térelemek kölcsönös helyzetét;
- térgeometriai számolásokat tud végezni;
- ismeri az Euklidesz- és Bolyai-féle geometria különbségét;
- ismeri a projektív sík elemeit, ideális pont és egyenes.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- ismeri és feladatmegoldásban alkalmazza a térelemek kölcsönös helyzetét, távolságát és hajlásszögét;

- ismeri a mérés alapelvét, alkalmazza konkrét alap- és származtatott mennyiségek esetén;
- ismeri a hosszúság, terület, térfogat, űrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
- sík- és térgeometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben adja meg válaszát;
- ismeri és alkalmazza a hasáb, a henger, a gúla, a kúp, a gömb, a csonkagúla, a csonkakúp (speciális testek) tulajdonságait;
- lerajzolja a kocka, téglatest, egyenes hasáb, egyenes körhenger, egyenes gúla, forgáskúp hálóját;
- kiszámítja a speciális testek felszínét és térfogatát egyszerű esetekben;
- ismeri és alkalmazza a hasonló síkidomok kerületének és területének arányára vonatkozó tételeket;
- ismeri és alkalmazza a hasonló testek felszínének és térfogatának arányára vonatkozó tételeket;
- pontok és egyenesek kettősviszonyát ki tudja számolni;
- ismeri és alkalmazza a Pascal-, Brianchon- és Desargues-tételeket;
- tudja, hogy a vetítés kettősviszony-tartó transzformáció.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Tételek kölcsönös helyzetének, távolságának és hajlásszögének ismerete, alkalmazása feladatmegoldásban
- A terület, térfogat, űrtartalom mértékegységeinek és ezek átváltási szabályainak ismerete
- Sűrűség mértékegységei közötti átváltás ismerete
- Sík- és térgeometriai feladatoknál a válasz megadása a problémának megfelelő mértékegységben
- A hasáb, a henger, a gúla, a kúp, a gömb, a csonkagúla, a csonkakúp (speciális testek) tulajdonságainak ismerete és alkalmazása a hétköznapi életben előforduló testekkel kapcsolatban
- A kocka, a téglatest, az egyenes hasáb, az egyenes körhenger, az egyenes gúla és a forgáskúp hálójának lerajzolása konkrét esetekben
- A mindennapi életben előforduló hasáb, henger, gúla, kúp, gömb, csonkagúla, csonkakúp alakú tárgyak felszínének és térfogatának meghatározása méréssel és számítással
- Síkidomok forgatásával keletkező egyszerű, a mindennapi életben is előforduló testek felszínének és térfogatának kiszámítása
- A hasonló síkidomok kerületének és területének arányára vonatkozó tételek ismerete és alkalmazása
- A hasonló testek felszínének és térfogatának arányára vonatkozó tételek ismerete és alkalmazása
- Vetítés, kettősviszony alkalmazásával megold feladatokat
- Harmonikus pontnégyest felhasználja bizonyításoknál
- Kúpszeletekkel kapcsolatos szerkesztéseket, bizonyításokat végez
- Gömbi geometria elemei, Lénárt-féle gömb
- Egybevágóságok rendszerezése

- Hasonlóság és forgatványújtás alkalmazása

FOGALMAK

kocka, téglatest, hasáb, henger, gúla, kúp, gömb, csonkagúla, csonkakúp, egyenes test, forgástest, n -oldalú szabályos gúla, tetraéder, alaplap, oldallap, alapél, oldalél, alkotó, palást, testmagasság, test hálója

axióma, kettősviszony, harmonikus elválasztás

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Hétköznapi tárgyak (üdítődoboz, vizesflakon, tejfölösdoboz stb.) térfogatának megállapítása méréssel, a kapott eredmény összehasonlítása a tárgyon szereplő értékkel
- A Louvre bejáratoként épített üvegpíramis földfelszín feletti térfogatának és az üvegfelület felszínének meghatározása (szükséges adatok gyűjtése az internetről)
- Annak becslése csoportmunkában, hogy a teret milyen arányban tudjuk kitölteni egybevágó érintkező gömbökkel különböző elrendezések esetén
- Különböző méretű, megközelítőleg gömb alakú gyümölcsök térfogatának és felszínének becslése, a becslés ellenőrzése méréssel
- A Föld felszínének és térfogatának közelítése földgömbmodellen méréssel és számolással, majd a kapott értékek összevetése a hivatalos adatokkal
- Projektmunka a gömbről: hogyan jelenik meg a gömb a mindennapi életben, a többi tantárgyban és a matematikában; a gömbi geometria alapjai
- A témakörhöz tartozó nehezebb feladatok, versenyfeladatok megoldása
- Vetítések egymásutánjával megoldható nehezebb feladatok megoldása
- Dandelin-gömb, kúpszeletek főköreire, vezérköreire és egyenesekre vonatkozó tételek

TÉMAKÖR: Koordinátageometria

JAVASOLT ÓRASZÁM: 30 óra

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- ismeri a vektorokkal kapcsolatos alapvető fogalmakat;
- ismer és alkalmaz egyszerű vektorműveleteket;
- alkalmazza a vektorokat feladatok megoldásában;
- megad pontot és vektort koordinátaival a derékszögű koordináta-rendszerben;
- koordináta-rendszerben ábrázol adott feltételeknek megfelelő pontthalmazokat;
- koordináták alapján számításokat végez szakaszokkal, vektorokkal;
- ismeri és alkalmazza az egyenes egyenletét;
- egyenesek egyenletéből következtet az egyenesek kölcsönös helyzetére;
- kiszámítja egyenesek metszéspontjainak koordinátáit az egyenesek egyenletének ismeretében;
- megadja és alkalmazza a kör egyenletét a kör sugarának és a középpont koordinátáinak ismeretében;
- felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot;
- ismeri a vektorok skalárszorítását és feladatokban alkalmazza;

- ismeri a vektoriális szorzatot és a vegyes szorzatot, terület és térfogat meghatározására használja;
- ismeri az egyenes egyenletének többféle formáját (tengelymetszetes, iránytangenses, irányvektoros, normálvektoros);
- vektorok merőlegességét vizsgálja;
- ismeri és alkalmazza pont és egyenes távolságának képletét;
- meg tudja oldani a koordináta geometria egyenessel, körrel, síkkal, gömbbel kapcsolatos alapfeladatait.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A vektor, vektor abszolút értéke, nullvektor, ellentett vektor, helyvektor fogalmak ismerete, alkalmazása
- A vektorok összeadása, kivonása, szorzása valós számmal, műveletek ismerete és alkalmazása
- Vektorok alkalmazása feladatok megoldásában
- Pont és vektor megadása koordinátákkal a derékszögű koordináta-rendszerben
- Adott feltételeknek megfelelő ponthalmazok ábrázolása koordináta-rendszerben
- Két pont távolságának, vektor abszolút értékének meghatározása koordináták alapján
- Vektorok összegének, különbségének, számszorosának koordinátái
- Szakaszelezőpont koordinátáinak meghatározása a végpontok koordinátái alapján
- Egyenes egyenlete $y = mx + b$ vagy $x = c$ alakban
- Egyenes meredekségének fogalma; egyenesek merőlegességének és párhuzamosságának megállapítása a meredekségek alapján
- Az egyenesek egyenletének ismeretében egyenesek metszéspontjának koordinátái
- A kör egyenletének megadása és alkalmazása a kör sugarának és a középpont koordinátáinak ismeretében
- Vektorok skaláris szorzatának ismerete és alkalmazása
- Az egyenes egyenletének irányvektoros és normálvektoros alakja
- Kör és egyenes kölcsönös helyzetének meghatározása
- Kör adott pontjába húzható érintő egyenletének felírása
- Szakaszt adott arányban osztó pont koordinátáinak meghatározása
- Háromszög súlypontjának koordinátái
- Egyenlő oldalú és ortogonális tetraéder tulajdonságai
- Addíciós tételek és következmények, ezek igazolása
- Szögfüggvényeket tartalmazó azonosságok
- Egyenes egyenletrendszer a térben
- A kör érintőjének egyenlete
- A háromszög koordináta geometriai (előjeles) területe
- Skalárszorzat, vektoriális szorzat, vegyes szorzat alaptulajdonságai, kiszámolása koordináta-rendszerben, alkalmazása feladatokban, bizonyításokban
- A konkrét fizikai tértől való elvonatkoztatás, a paramétertér, az alakzatok absztrakt terének megértése, kezelése
- Apollóniusz-kör tétele
- Kúpszeletek analitikus jellemzése

- Analitikus geometria alkalmazása mértani helyek keresésénél és bizonyítási feladatoknál
- Pontra és tengelyre való tükörképek egyenlete
- Szögfelező egyenlete
- A kúpszeletek tulajdonságainak analitikus bizonyítása
- Hatványvonal vizsgálata analitikus módszerekkel

FOGALMAK

vektor, vektor abszolút értéke, nullvektor, ellentett vektor, helyvektor, vektorok összege, vektorok különbsége, vektor számszorosa, vektor koordinátái, alakzat egyenlete, egyenes egyenlete, kör egyenlete

irányvektor, normálvektor, skaláris szorzat, iránytangens, alakzatok egyenlete, egyenletrendszere

vektoriális szorzat, vegyes szorzat, Apollóniusz-kör, hatványvonal

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- „Torpedójáték” koordináta-rendszerben
- Helymeghatározás térképen a szélességi és hosszúsági adatok segítségével
- Ház/lakás alaprajzának elkészítése koordináta-rendszerben, az eredeti adatok alapján
- Játék helyvektorokkal dinamikus geometriai szoftver használatával
- Gondolattérkép készítése a koordináta-geometria kapcsolatainak bemutatására csoportos vagy egyéni munkaformában
- „Oroszlánfogás”: lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldása grafikusán, digitális eszköz segítségével
- „Célba lövés”: játék körökkel a koordináta-rendszerben
- Hétköznapi helyzetek, mozgások, tervrajzok modellezése koordináta-geometriai eszközökkel
- A skaláris szorzat előfordulásának megmutatása fizikai mennyiségeknél
- Ferdeszögű koordináta-rendszer és affinitás
- Egyenes- és körsorok
- A projektív geometria analitikusan
- Kúpszeletek elforgatottjának egyenlete
- Szerkesztési feladatok megoldása analitikus geometriával
- Apollóniusz „Kóniká”-ja
- Aszümptomáktól a homogén koordinátákig – Apollóniusz, Descartes, Plücker
- Erővonalak és ekvipotenciális felületek
- Ortogonalis trajektóriák
- Vegyes szorzat az elektromágneses térben
- 3-nál több dimenzió kezelése

TÉMAKÖR: Leíró statisztika

JAVASOLT ÓRASZÁM: 8 óra

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- adott cél érdekében tudatos adatgyűjtést és rendszerezést végez;

- hagyományos és digitális forrásból származó adatsokaság alapvető statisztikai jellemzőit meghatározza, értelmezi és értékeli;
- ismeri és alkalmazza a sodrófa (box-plot) diagramot adathalmazok jellemzésére, összehasonlítására;
- felismer grafikus manipulációkat diagramok esetén;

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A reprezentatív minta fogalmának szemléletes ismerete
- Hétköznapi, társadalmi problémákhoz kapcsolódó statisztikai adatok tervszerű gyűjtése
- Statisztikai adatok rendszerezése, jellemzése kvartilisekkel, középértékekkel és szóródási mutatókkal
- Sodrófa (box-plot) diagram készítése, alkalmazása
- A kapott adatok értelmezése, értékelése, statisztikai következtetések
- Nagy adathalmazok kezelése táblázatkezelő programmal
- Grafikus és szöveges statisztikai manipulációk felismerése

FOGALMAK

reprezentatív minta, sodrófa (box-plot) diagram, minimum, maximum, kiugró adat, kvartilisek, terjedelem, szórás

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Példák reprezentatív és nem reprezentatív mintavételre
- Szavazások szimulálása és különböző szavazatértékelő rendszerek vizsgálata iskolai körülmények között
- A Simpson-paradoxon bemutatása példákon
- Az interneten található, megbízható forrásból (pl. KSH honlapja) származó statisztikák értelmezése, elemzése, lehetséges következtetések megfogalmazása
- Különböző forrásokból származó adathalmazok statisztikai elemzése, értékelése, ezekből valamilyen adott szempont alapján manipulatív és nem manipulatív diagram készítése

TÉMAKÖR: Valószínűségszámítás

JAVASOLT ÓRASZÁM: 20 óra

TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- konkrét valószínűségi kísérletek esetében az esemény, eseménytér, elemi esemény, relatív gyakoriság, valószínűség, egymást kizáró események, független események fogalmát megkülönbözteti és alkalmazza;
- ismeri és alkalmazza a klasszikus valószínűségi modellt és a Laplace-képletet;
- ismeri és egyszerű esetekben alkalmazza a valószínűség geometriai modelljét;
- meghatározza a valószínűséget visszatevéses, illetve visszatevés nélküli mintavétel esetén;
- ismeri és egyszerű esetekben alkalmazza a Bayes-tételt és a teljes valószínűség tételét;
- ismeri és feladatmegoldásokban alkalmazza a geometriai eloszlást;

- ismeri és alkalmazza a nagy számok törvényét, felismeri a helytelen statisztikai következtetéseket.

FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Példák ismerete események összegére, szorzatára, komplementer eseményre, egymást kizáró eseményekre
- Elemi események fogalmának ismerete, alkalmazása események előállítására
- Példák ismerete független és nem független eseményekre
- A klasszikus valószínűségi modell és a Laplace-képlet ismerete, alkalmazása
- A geometriai valószínűség fogalmának ismerete és alkalmazása
- Valószínűségek meghatározása visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel esetén
- A várható érték ismerete és meghatározása konkrét feladatokban, játékokban
- Pénzügyi fogalmakkal kapcsolatos valószínűségi ismeretek (például biztosítás, befektetések kockázata, árfolyamkockázat)
- Egyszerű szimmetrikus bolyongás (tönkremenési játék, születésszabályozás)
- A várható érték fogalmával és értelmezésével kapcsolatos paradoxonok (pl. Pétervári paradoxon)
- A várható érték felhasználása pozitív értékű valószínűségi változónál a valószínűség becslésére

FOGALMAK

események összege, események szorzata, esemény komplementere, egymást kizáró események, független események, geometriai valószínűség, visszatevéses mintavétel, visszatevés nélküli mintavétel, várható érték

diszkrét eloszlások (binomiális, hipergeometrikus, geometriai), valószínűségi változó várható értéke és szórása, Bayes-tétel és teljes valószínűség tétele

JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Konkrét valószínűségi kísérletek végrehajtása vagy dinamikus szoftver segítségével történő szimulálása (pl. szabályos dobókockákkal, pénzérmével dobálás); a kapott gyakoriságok és relatív gyakoriságok táblázatba foglalása; becslés az egyes kimenetek, illetve összetett események valószínűségére csoportmunkában
- Példák keresése független és nem független, illetve egymást kizáró eseményekre csoportmunkában
- Orvosi tesztek eredményének esélyelemzése fagráf segítségével
- Egyszerű valószínűségi játékokhoz kapcsolódóan a várható nyereség és az igazságosság fogalmának kialakítása
- Konkrét bank konkrét befektetési portfóliójának értelmezése, elemzése
- Néhány konkrét biztosítási ajánlat értelmezése, elemzése