XXIX. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc

2023. április 21.

12. évfolyam

1. Dani és Ede az összes olyan négyjegyű pozitív egész számokat leírta a füzetébe, amelyekben nem szerepel nulla számjegy, és bármely két számjegye különböző. Dani ezek közül azokat írta fel növekvő sorrendben, amelyeknek a második számjegytől kezdve mindegyik számjegye nagyobb volt az előzőnél. Ede pedig azokat írta fel növekvő sorrendben, amelyeket Dani nem írt fel. Melyik volt a 60. felírt szám Dani, illetve Ede listáján?

(Erdős Gábor, Nagykanizsa és Fedorszki Ádám, Beregszász)

2. Egy téglatest élei hosszának mérőszámai pozitív egész számok, térfogata 2023 egység. Ha valaki elárulná a téglatest felszínének mérőszámában az első számjegyet vagy a számjegyek összegét, önmagában egyik információ sem lenne elegendő az élek meghatározásához. Mekkorák a téglatest élei?

(Kárász Péter, Budapest)

3. Mennyi az $A = \left(8 - 3\,\mathrm{tg}^2\, x\right)^2 + \left(8 + 3\,\mathrm{ctg}^2\, x\right)^2$ kifejezés legkisebb értéke? Hol veszi fel ezt a legkisebb értéket a kifejezés?

(Kovács Béla, Szatmárnémeti)

4. Az ABC háromszögben az AB oldal mértéke a másik két oldal mértékének négyzetes közepe: $AB = \sqrt{\frac{AC^2+BC^2}{2}}$. Az ABC háromszög S súlypontjából a CA, AB és BC oldalegyenesekre állított merőlegesek talppontja legyen N, P és Q. Bizonyítsa be, hogy az NPQ háromszög egyenlő szárú.

(Molnár István, Gyula)

5. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\frac{x}{4} = \left(\sqrt{1+x} - 1\right)\left(\sqrt{1-x} + 1\right).$$

(Katz Sándor, Bonyhád)

6. Legyen az ABC derékszögű háromszög beírt és körülírt körének sugara rendre r és R, az AB átfogóhoz tartozó magasság CD. Rajzoljuk meg azt a CD oldalhosszúságú $CEFG$ négyzetet, amelynek E és G csúcsa rendre az AC és BC szakaszokon van. Legyen az ABC háromszög és a $CEFG$ négyzet közös részének területe T, a $CEFG$ négyzetnek az ABC háromszöggel nem fedett részének területe t.

(a) Bizonyítsa be, hogy $\dfrac{t}{T} = \dfrac{r}{2R}$.

(b) Milyen határok között változhat $\dfrac{t}{T}$ értéke?

(Bíró Bálint, Eger)

Megoldások

1. Kezdjük a Dani által leírt számokkal. Ha az első számjegy 1-es, akkor a további számjegyeket $\binom{8}{3} = 56$-féleképpen lehet kiválasztani. Ezek sorrendje egyértelmű, hiszen növekvő sorrendben kell írni őket, vagyis Dani 56 darab 1-gyel kezdődő számot írt le. Ezt követően jöttek a 2-vel kezdődők: 57. lett a 2345, 58. lett a 2346, 59. lett a 2347, így 60. lett a 2348.

Nézzük most az Ede által leírt számokat. A listája elején az $\overline{12ab}$ alakú számok állnak. A feladatban leírt típusú számok között $7 \cdot 6 = 42$ ilyen van, de ezek közül $\binom{7}{2} = 21$-et Dani is leírt, ezért Ede listájára 21 darab került. Hasonlóan számolva, az $\overline{13ab}$ alakú számok közül $7 \cdot 6 - \binom{6}{2} = 42 - 15 = 27$ darabot írt le Ede, így eddig már 48 számot leírt. Az már látszik, hogy a 60. leírt szám $\overline{14ab}$ alakú, hiszen ezekből összesen $7 \cdot 6 - \binom{5}{2} = 42 - 10 = 32$ darab van. Ha $a = 2$ akkor ezt a számot Dani nem írta le, így ezeket a számokat mind Ede írta le. Mivel b értéke 6-féle lehet, 6 ilyen szám van. Ugyanezt elmondhatjuk akkor is, ha $a = 3$, tehát ezekből is 6 darabot írt fel Ede. De ezzel Ede összesen már pontosan $48 + 12 = 60$ darab számot írt le, ezért a 60. általa leírt szám az 1439.

2. Jelölje a téglatest három élét a, b és c, ekkor $V = abc = 2023$. Mivel $2023 = 7 \cdot 17^2$, ezért a 2023 prímtényezős felbontásában szereplő tényezőkből illetve az 1-ből kell háromtényezős szorzatokat előállítanunk. Az alábbi táblázat tartalmazza az összes lehetséges élhosszúságot (természetesen a permutációktól eltekintve). A negyedik oszlopban kiszámítottuk a téglatestek felszínét (A) is, valamint egy újabb oszlopban a számjegyek összegét (S).

a	b	c	A	S
1	1	2023	8094	21
1	7	289	4638	21
1	17	119	4318	16
7	17	17	1054	10

Mivel az első számjegy ismeretének birtokában nem tudnánk kitalálni az élek hosszát, ezért a felszín mérőszámában az első számjegy csak 4 lehet, vagyis csak a második vagy a harmadik eset állhat fenn. Önmagában a felszín mérőszámában lévő számjegyek összege sem lenne elegendő információ, így az előbb említetthez hasonlóan ez csak 21 lehet, vagyis az első vagy a második eset áll fenn. A kettőt összevetve megállapíthatjuk, hogy a második esettel van dolgunk, azaz a téglatest élei 1, 7 és $17^2 = 289$ egység hosszúságúak.

3. **1. megoldás:** A kifejezés értelmezési tartománya $\mathbb{R} \setminus \left\{k \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Ezen a halmazon

$$A = \left(8 - 3\operatorname{tg}^2 x\right)^2 + \left(8 + 3\operatorname{ctg}^2 x\right)^2 = 128 - 48\left(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x\right) + 9\left(\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x\right).$$

Legyen $y = \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x$, ekkor $y^2 = \operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x - 2$, ezért

$$A = 128 - 48y + 9y^2 + 18 = (3y - 8)^2 + 82.$$

Ennek minimuma 82, amelyet $y = \frac{8}{3}$ esetén vesz fel. Visszahelyettesítve:

$$\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x = \frac{8}{3}$$
$$\operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{8}{3}$$
$$3\operatorname{tg}^4 x - 8\operatorname{tg}^2 x - 3 = 0$$

Ennek megoldásai $\operatorname{tg}^2 x = 3$ és $\operatorname{tg}^2 x = -\frac{1}{3}$. Csak az első lehetséges, ekkor $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}$. Ezeket az értékeket az

$$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \quad \text{illetve} \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

helyeken veszi fel a tg függvény.

Tehát a kifejezés minimuma 82, ezt az értéket $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, illetve $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ helyeken veszi fel.

2. megoldás: A kifejezés értelmezési tartománya $\mathbb{R} \setminus \left\{k \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Legyen $t = \operatorname{tg}^2 x$, ahol $t > 0$. Ekkor $A(t) = (8 - 3t)^2 + \left(8 + \frac{3}{t}\right)^2$.

$$\begin{aligned} A'(t) &= -6(8-3t) - 6\left(8 + \frac{3}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2} = -\frac{6}{t^3}\left(-3t^4 + 8t^3 + 8t + 3\right) = \\ &= \frac{6}{t^3}(t-3)\left(3t^3 + t^2 + 3t + 1\right). \end{aligned}$$

Ennek pozitív zérushelye csak $t = 3$, mert a második tényező pozitív t-re pozitív.

A $t = 3$ helyen A' előjelet vált, negatívból pozitívba megy át, tehát itt A-nak minimuma van $A_{\min} = A(3) = 82$ értékkel. A $t = \operatorname{tg}^2 x = 3$, ha $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}$. Ezeket az értékeket az

$$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \quad \text{illetve} \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

helyeken veszi fel a tg függvény.

Tehát a kifejezés minimuma 82, ezt az értéket $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, illetve $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ helyeken veszi fel.

4. 1. megoldás: Az ABC háromszögben a szokásos jelölésekkel: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $BAC\sphericalangle = \alpha$, $ABC\sphericalangle = \beta$, $ACB\sphericalangle = \gamma$. Jelölje s_a, s_b, s_c a megfelelő oldalakhoz tartozó súlyvonalakat. Jelöljük S merőleges vetületét a CA, AB és BC oldalegyeneseken rendre N, P, Q-val.

I. Ha N, P, Q a megfelelő oldalak belső pontjai.

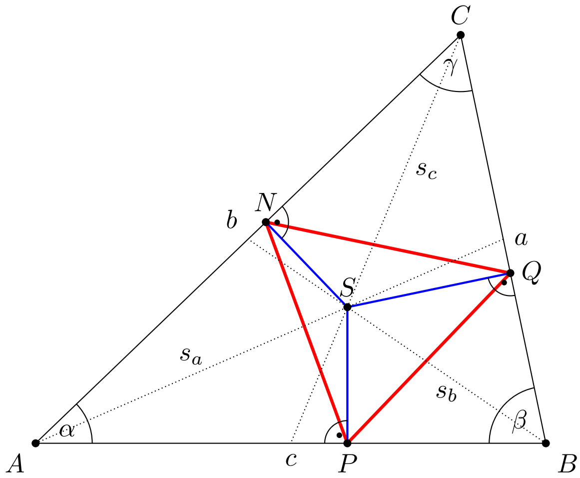
A feladat feltételei alapján $c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, ahonnan

$$a^2 + b^2 = 2c^2 \tag{1}$$

Az $ANSP$ négyszög húrnégyszög, mert $ANS\sphericalangle + APS\sphericalangle = 180°$. Felhasználva, hogy AS az $ANSP$ négyszög köré írható kör átmérője, következik, hogy $NP = AS \sin\alpha$. Hasonló gondolatmenettel a $CNSQ$ és $BPSQ$ húrnégyszögekből felírható, hogy $QN = CS \sin\gamma$ és $QP = BS \sin\beta$.

Tudjuk, hogy $AS = \frac{2}{3}s_a$ és $BS = \frac{2}{3}s_b$. Az (1) összefüggés alapján

$$\begin{aligned} s_a^2 &= \frac{2(b^2+c^2) - a^2}{4} = \frac{2b^2 + 2c^2 - 2c^2 + b^2}{4} = \frac{3}{4}b^2, \\ s_b^2 &= \frac{2(a^2+c^2) - b^2}{4} = \frac{2a^2 + 2c^2 - 2c^2 + a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2. \end{aligned}$$



1. ábra.

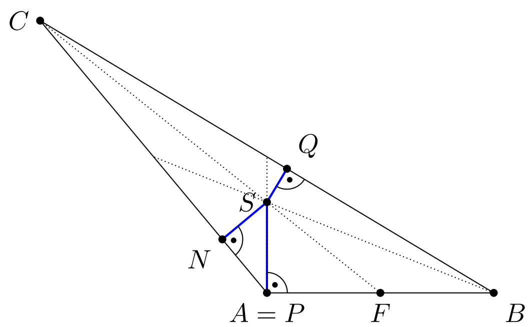
Mindezeket figyelembe véve

$$NP^2 = AS^2 \sin^2\alpha = \frac{4}{9}s_a^2 \sin^2\alpha = \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{4}b^2\sin^2\alpha = \frac{1}{3}b^2\sin^2\alpha,$$
$$QP^2 = BS^2 \sin^2\beta = \frac{4}{9}s_b^2 \sin^2\beta = \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{4}a^2\sin^2\beta = \frac{1}{3}a^2\sin^2\beta.$$

Felírva a szinusz-tételt az ABC háromszögben: $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, azaz $b\sin\alpha = a\sin\beta$. Ebből látható, hogy $NP^2 = QP^2$, azaz $NP = QP$, tehát az NPQ háromszög egyenlő szárú.

II. Feltehetjük, hogy $a > b$, ekkor az A csúcsnál tompaszög is lehet. Tekintsük azokat az eseteket, amikor a súlypont valamelyik vetülete nem a megfelelő oldal belső pontja.

(i) Először vizsgáljuk meg, hogy a P pont egybeeshet-e az A ponttal a 2. ábra szerint.



2. ábra.

Ekkor

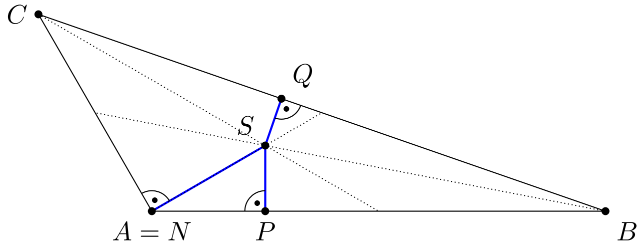
$$SF^2 = \left(\frac{1}{3}s_c\right)^2 = \frac{1}{9}\cdot\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}.$$

Az $a^2 + b^2 = 2c^2$ feltételt figyelembe véve

$$SF^2 = \frac{1}{9}\cdot\frac{4c^2-c^2}{4} = \frac{c^2}{12} \quad\Rightarrow\quad SF = \frac{c}{2\sqrt{3}} < \frac{c}{2},$$

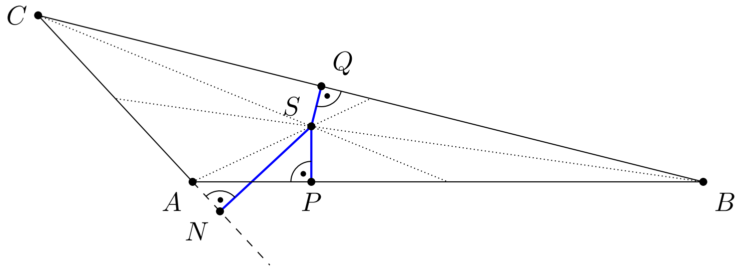
ami azt jelenti, hogy az $a^2 + b^2 = 2c^2$ feltétel fennállása esetén P mindig az AB oldal belső pontja.

(ii) S-nek az AC oldalra eső vetülete, N viszont lehet az oldal végpontjában (3. ábra). (Ellenőrizhető, hogy pl. $a = \sqrt{7}$, $b = 1$, $c = 2$ esetén $s_a \perp AC$.) Most $NSP\sphericalangle$ és α merőleges szárú szögek, így $NSP\sphericalangle = 180° - \alpha$, ezért $NP = AS\sin(180° - \alpha) = AS\sin\alpha$.



3. ábra.

(iii) Végül, ha N az AC oldalon kívül van (4. ábra), akkor N és P illeszkedik AS Thalész-körére. Mivel itt is $NSP\sphericalangle = 180° - \alpha$, ezért $NP = AS\sin(180° - \alpha) = AS\sin\alpha$.



4. ábra.

Mindkét esetben alkalmazható az I. rész további gondolatmenete.

2. megoldás: Helyezzük a háromszöget koordinátarendszerbe az 5. ábra szerint.

A feltétel szerint $2AB^2 = AC^2 + BC^2$:

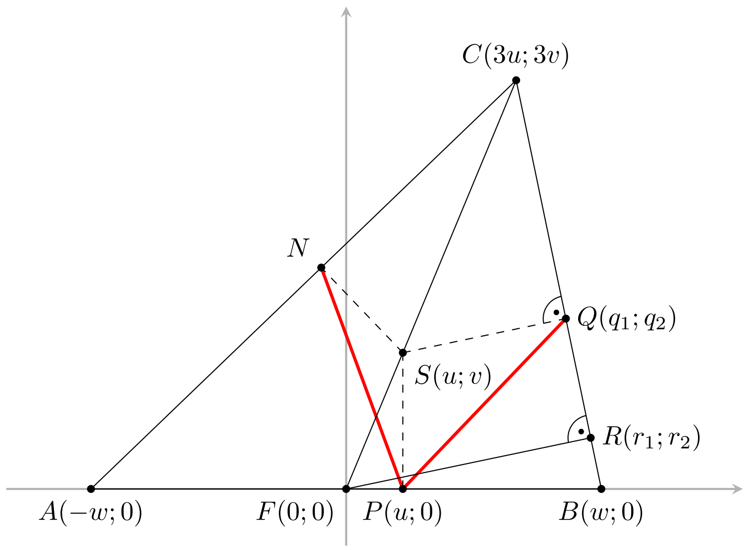
$$2\,(2w)^2 = (3u + w)^2 + (3v)^2 + (3u - w)^2 + (3v)^2 \quad \Rightarrow \quad u^2 + v^2 = \frac{w^2}{3}. \tag{2}$$

Először R koordinátáit határozzuk meg.

$$\begin{aligned} FR&: \quad (3u - w)\,x + 3vy = 0, \\ BC&: \quad 3vx - (3u - w)\,y = 3wv \end{aligned}$$

Ezek metszéspontja: $R\left(\frac{9v^2}{4w-6u}; \frac{3v(w-3u)}{4w-6u}\right)$. Q az RC szakasz harmadolópontja:

$$q_1 = \frac{2r_1 + 3u}{3} = \frac{3v^2}{2w - 3u} + u, \qquad q_2 = \frac{2r_2 + 3v}{3} = \frac{3v\,(w - 2u)}{2w - 3u}.$$



5. ábra.

Használjuk fel, hogy (2) szerint $v^2 = \frac{w^2}{3} - u^2$:

$$PQ^2 = \frac{9v^2\left(\frac{1}{3}w^2 - u^2 + w^2 - 4wu + 4u^2\right)}{(2w-3u)^2} = \frac{3v^2\left(4w^2 - 12wu + 9u^2\right)}{(2w-3u)^2} = 3v^2.$$

Ha a fenti levezetésbe w helyett $-w$-t írunk, akkor az AC szakaszon lévő N pont koordinátáit, illetve $NQ^2 = 3v^2$-et kapunk, azaz $PQ = PN$.

Megjegyzés:

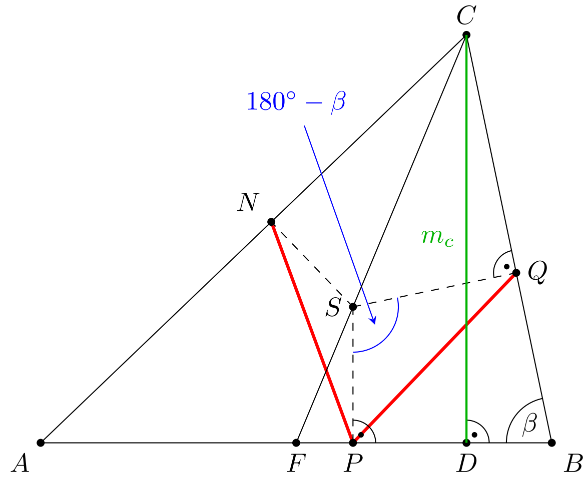
Az $u^2 + v^2 = \frac{w^2}{3}$ feltételből itt is következik, hogy $|u| < \frac{w}{\sqrt{3}}$, tehát P az AB oldal belső pontja, de itt nem használtuk fel ezt a feltételezést, ezért ennek igazolására itt nincs szükség.

3. megoldás: A feltétel szerint $2c^2 = a^2 + b^2$. Az FPS háromszöget F-ből 3-szorosára nagyítva az FDC háromszögbe megy át, ezért $SP = \frac{m_c}{3}$. Ugyanígy $SQ = \frac{m_a}{3}$ és $SN = \frac{m_b}{3}$ (6. ábra). A $PBQS$ négyszögnek két derékszöge van, ezért $PSQ\sphericalangle = 180° - \beta$, ugyanígy $PSN\sphericalangle = 180° - \alpha$.

A koszinusz-tételt alkalmazva (a $PSQ\triangle$, majd az $ABC\triangle$-ben), kifejezzük PQ^2-t:

$$\begin{aligned}PQ^2 &= \left(\frac{m_c}{3}\right)^2 + \left(\frac{m_a}{3}\right)^2 - 2\cdot\frac{m_c}{3}\cdot\frac{m_a}{3}\cos(180° - \beta) = \\ &= \frac{m_c^2}{9}\left(1 + \frac{m_a^2}{m_c^2} + 2\cdot\frac{m_a}{m_c}\cos\beta\right) = \frac{m_c^2}{9}\left(1 + \frac{c^2}{a^2} + 2\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right) = \\ &= \frac{m_c^2}{9}\left(1 + \frac{a^2+2c^2-b^2}{a^2}\right) = \frac{m_c^2}{9}\left(1 + \frac{a^2+a^2}{a^2}\right) = \frac{m_c^2}{3},\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy $2T = a\cdot m_a = b\cdot m_b$ alapján $\frac{m_a}{m_c} = \frac{c}{a}$.



6. ábra.

Azonos gondolatmenettel fejezhetjük ki PN^2-t is:

$$PN^2 = \left(\frac{m_c}{3}\right)^2 + \left(\frac{m_b}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{m_c}{3} \cdot \frac{m_b}{3} \cos(180° - \alpha) =$$
$$= \frac{m_c^2}{9}\left(1 + \frac{m_b^2}{m_c^2} + 2 \cdot \frac{m_b}{m_c}\cos\alpha\right) = \frac{m_c^2}{9}\left(1 + \frac{c^2}{b^2} + 2 \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) =$$
$$= \frac{m_c^2}{9}\left(1 + \frac{b^2 + 2c^2 - a^2}{b^2}\right) = \frac{m_c^2}{9}\left(1 + \frac{b^2 + b^2}{b^2}\right) = \frac{m_c^2}{3}.$$

Mivel $PQ = PN = \frac{m_c}{\sqrt{3}}$, ezért az $NPQ\triangle$ egyenlőszárú.

Itt is szükséges annak igazolása, hogy az $a^2 + b^2 = 2c^2$ feltétel teljesülése esetén P az AB oldal belső pontja. (Vagy annak megmutatása, hogy ha P nem belső pont, akkor is $PSQ\sphericalangle = 180° - \beta$ és $PSN\sphericalangle = 180° - \alpha$.)

5. **1. megoldás:** Az

$$\frac{x}{4} = \left(\sqrt{1+x} - 1\right)\left(\sqrt{1-x} + 1\right) \tag{3}$$

egyenlet értelmezési tartománya: $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Végezzük el a beszorzást:

$$\frac{x}{4} = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} - 1, \tag{4}$$

majd rendezzük:

$$\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} + 1 = \sqrt{1-x^2} - \frac{x}{4}.$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve:

$$3 + 2\left(\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2}\right) = 1 - x^2 + \frac{x^2}{16} - \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2},$$
$$2\left(\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2} + 1\right) = -\frac{15x^2}{16} - \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}.$$

Ha valamely valós x megoldása a (3) illetve a (4) egyenletnek, akkor erre a bal oldal $-\frac{x}{2}$-vel egyenlő (4) szerint:

$$-\frac{x}{2} = -\frac{15x^2}{16} - \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2},$$
$$\frac{x}{2}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{15x}{8} - 1\right) = 0.$$

Ha az első tényező nulla, akkor $x_1 = 0$. Ez megoldása a (3) egyenletnek.

Ha a második tényező nulla, akkor $\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{15x}{8}$. A megoldhatóság feltétele, hogy $1 - \frac{15x}{8} \geqslant 0$, azaz $x \leqslant \frac{8}{15}$. Újra négyzetre emelve:

$$1 - x^2 = 1 - \frac{15x}{4} + \frac{225x^2}{64},$$
$$0 = \frac{x}{4}\left(-15 + \frac{289x}{16}\right).$$

A második tényezőből kapunk új gyököt $x_2 = \frac{240}{289}$. Látható, hogy x_2 nem felel meg az $x \leqslant \frac{8}{15}$ feltételnek, tehát csak egy gyök van: $x = 0$.

(A két négyzetre emelés és egy korábbi egyenlet egyik oldal helyett a másik visszahelyettesítése sem ekvivalens átalakítás, ezért a kapott gyököt ellenőrizni kell.)

2. megoldás: Legyen $\sqrt{1+x} = u$, $\sqrt{1-x} = v$, ahol $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$. Ekkor (3) a következő egyenletrendszerrel ekvivalens:

$$\left.\begin{aligned} \frac{u^2-1}{4} &= (u-1)(v+1) \\ u^2+v^2 &= 2 \end{aligned}\right\} \iff \left.\begin{aligned} (u-1)\left(v+1-\frac{u+1}{4}\right) &= 0 \\ u^2+v^2 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Az első tényezőből $u = 1$, ebben az esetben $x = 0$, ez megoldása a (3) egyenletnek.

A második tényezőből $u = 4v + 3$. A $(4v+3)^2 + v^2 = 2$, vagyis a $17v^2 + 24v + 7 = 0$ egyenletnek csak negatív megoldásai vannak, ezért ezek nem szolgáltatnak megoldást (3)-nak. Tehát $x = 0$ az egyetlen gyök.

3. megoldás: Az egyenlet értelmezési tartománya $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Szorozzuk (3) mindkét oldalát $\sqrt{1+x}+1$-gyel. Mivel ez minden értelezett x-re pozitív, ezért a szorzás nem hoz be új megoldást.

$$\frac{x}{4}\left(\sqrt{1+x}+1\right) = x\left(\sqrt{1-x}+1\right)$$
$$x\left(4\sqrt{1-x} + 3 - \sqrt{1+x}\right) = 0$$

Ebből $x = 0$, és a $4\sqrt{1-x} + 3 = \sqrt{1+x}$ egyenletnek nincs megoldása, mert a bal oldal minimuma 3, míg a jobb oldal maximuma $\sqrt{2}$. Így $x = 0$ a (3) egyenlet egyetlen megoldása.

4. megoldás: Mivel a (3) értelmezési tartománya $|x| \leqslant 1$, ezért létezik olyan $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, hogy $x = \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$. Innen $1 + x = 2\cos^2\alpha$ és $1 - x = 2\sin^2\alpha$. A fenti intervallumban $\sin\alpha \geqslant 0$, $\cos\alpha \geqslant 0$, ezért $\sqrt{1+x} = \sqrt{2}\cos\alpha$ és $\sqrt{1-x} = \sqrt{2}\sin\alpha$. Egyenletünk új alakja:

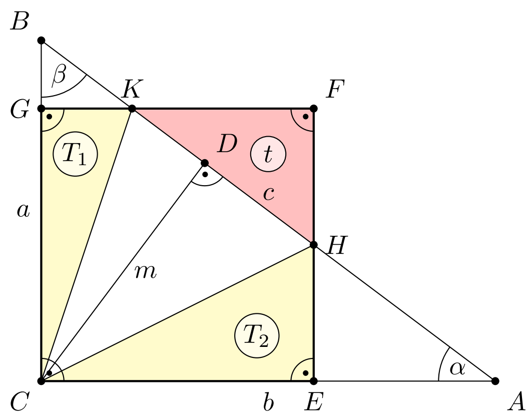
$$\begin{aligned}\frac{2\cos^2\alpha - 1}{4} &= \left(\sqrt{2}\cos\alpha - 1\right)\left(\sqrt{2}\sin\alpha + 1\right)\\ 0 &= 4\left(\sqrt{2}\cos\alpha - 1\right)\left(\sqrt{2}\sin\alpha + 1\right) - \left(\sqrt{2}\cos\alpha - 1\right)\left(\sqrt{2}\cos\alpha + 1\right)\\ 0 &= \left(\sqrt{2}\cos\alpha - 1\right)\left(4\sqrt{2}\sin\alpha + 4 - \sqrt{2}\cos\alpha - 1\right)\end{aligned}$$

Ha az első tényező 0, akkor az adott intervallumban $\alpha = \frac{\pi}{4}$, ebből $x = \cos 2\alpha = \cos\frac{\pi}{2} = 0$. Ez megoldása a (3) egyenletnek.

Ha a második tényező 0, akkor $4\sqrt{2}\sin\alpha + 3 = \sqrt{2}\cos\alpha$. Az adott intervallumban $\sin\alpha \geqslant 0$, ezért a bal oldal biztosan nagyobb, mint a jobb oldal. Tehát több megoldás nincs.

6. 1. megoldás:

(a) Készítsünk a feltételeknek megfelelő vázlatos ábrát.



7. ábra.

A 7. ábrán a szokásos jelöléseknek megfelelően $BC = a$, $CA = b$ és $AB = c$, a háromszög derékszögű, tehát körülírt körének átmérője az átfogó hosszával egyenlő, azaz $2R = c$, így elegendő bizonyítani, hogy $\frac{t}{T} = \frac{r}{c}$.

Az AB átfogónak és a $CEFG$ négyzet EF illetve FG oldalának metszéspontjait rendre H illetve K betűvel jelöltük, az átfogóhoz tartozó magasságra a $CD = m$, a KGC háromszög területére a T_1, a HCE háromszög területére a T_2, végül a feladatnak megfelelően a HKF háromszög területére a t jelölést alkalmaztuk.

Az ABC háromszög területére teljesül, hogy $\frac{ab}{2} = \frac{cm}{2}$, innen

$$m = \frac{ab}{c}. \tag{5}$$

Nyilvánvaló, hogy $T_1 = \frac{1}{2}KG \cdot CG$ és $T_2 = \frac{1}{2}HE \cdot CE$. Mivel azonban a feltételek miatt $CD = CG = CE = m$, ezért egyrészt $T_1 = \frac{1}{2}KG \cdot m$ és $T_2 = \frac{1}{2}HE \cdot m$, másrészt (5) szerint

$$2T_1 = \frac{KG \cdot ab}{c}, \qquad 2T_2 = \frac{HE \cdot ab}{c}. \tag{6}$$

A KGC és a KDC háromszögekben $CD = CG = m$, a CK közös szakasz, és a nagyobb oldalakkal, vagyis a CK szakasszal szemben lévő szögek mindkét háromszögben derékszögek, ezért a KGC és a KDC egybevágó háromszögek, tehát területük egyenlő. Hasonlóképpen láthatjuk be, hogy a HEC és a HDC háromszögek is egybevágók, ezért területük egyenlő.

Ez azt is jelenti, hogy az ABC háromszög és a $CEFG$ négyzet közös részének T területére teljesül, hogy $T = 2T_1 + 2T_2$, vagyis (6) szerint

$$T = \frac{ab}{c}\left(KG + HE\right). \tag{7}$$

A megfelelő szögek egyenlősége miatt a KBG és az ABC háromszögek hasonlók, megfelelő oldalaik aránya egyenlő, így $\frac{KG}{b} = \frac{BG}{a}$, mivel azonban $BG = a - m$, ezért $KG = \frac{b(a-m)}{a}$.

A megfelelő szögek egyenlősége miatt az AHE és az ABC háromszögek hasonlók, így $\frac{HE}{a} = \frac{AE}{b}$, és mivel $AE = b - m$, így $HE = \frac{a(b-m)}{b}$.

A kapott két összefüggésből (5) miatt adódik, hogy

$$KG = \frac{b\left(a - \frac{ab}{c}\right)}{a} = \frac{b\,(c-b)}{c}, \qquad HE = \frac{a\left(b - \frac{ab}{c}\right)}{b} = \frac{a\,(c-a)}{c}. \tag{8}$$

A műveletek elvégzése után $KG + HE = \frac{1}{c}\left(bc - b^2 + ac - a^2\right)$, majd az $a^2 + b^2 = c^2$ püthagoraszi összefüggés beírása, kiemelés és egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy $KG + HE = a + b - c$, vagyis (7) miatt

$$T = \frac{ab}{c}\left(a + b - c\right). \tag{9}$$

A $CEFG$ négyzetnek az ABC háromszöggel nem fedett része éppen a HKF háromszög, ezért $T_{HKF} = t$, így $t = \frac{1}{2}FK \cdot FH$.

Az $FG = FE = m$ összefüggésből következik, hogy $FK = m - KG$ és $FH = m - HE$, ahonnan (5) és (8) miatt kapjuk, hogy

$$FK = \frac{ab}{c} - \frac{b\,(c-b)}{c} = \frac{b\,(a+b-c)}{c}, \qquad HE = \frac{ab}{c} - \frac{a\,(c-a)}{c} = \frac{a\,(a+b-c)}{c}. \tag{10}$$

Eszerint $t = \frac{ab(a+b-c)^2}{2c^2}$, ebből pedig (9) miatt adódik, hogy

$$\frac{t}{T} = \frac{a+b-c}{2c}. \tag{11}$$

Felhasználhatjuk, hogy $a + b - c = 2r$, ebből (11) eredményünk alapján

$$\frac{t}{T} = \frac{2r}{2c} = \frac{r}{c}$$

következik, és éppen ezt akartuk bizonyítani.

(b) Átalakítjuk:

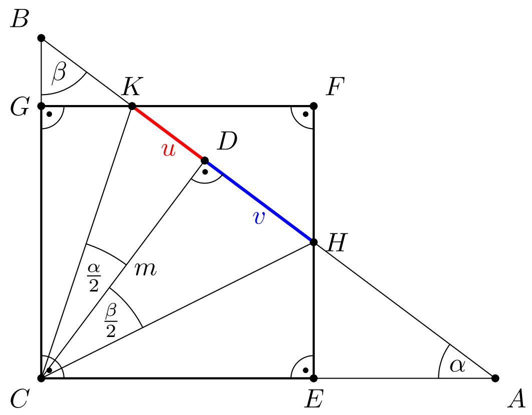
$$\frac{t}{T} = \frac{a+b-c}{2c} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\sin\alpha + \cos\alpha - 1\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\cdot\sin(\alpha + 45^\circ) - 1\right).$$

Ennek értékkészlete a $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ intervallumban $0 < \frac{t}{T} \leqslant \frac{\sqrt{2}-1}{2}$, a maximumát $\alpha = 45^\circ$, azaz egyenlő szárú, derékszögű háromszög estén veszi fel.

2. megoldás:

(a) $KGC\triangle \cong KDC\triangle$, mert megegyeznek két oldalban, ($CD = CG = m$, és CK közös), valamint a nagyobbikkal szemközti szögben: $CGK\sphericalangle = CDK\sphericalangle = 90°$.

Ugyanígy $CDH\triangle \cong CHE\triangle$. $DCA\sphericalangle = 90° - \alpha = \beta \Rightarrow DCH\sphericalangle = \beta/2$, ugyanis $DCK\sphericalangle = \alpha/2$.

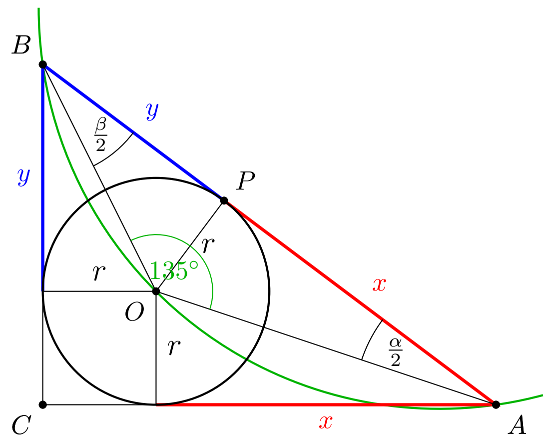


8. ábra.

Legyen $KD = u$, $DH = v$. Ekkor $T = 2T_{CHK\triangle} = (u+v)\,m$. A $CEFG$ négyzet területe m^2, ezért

$$\frac{t}{T} = \frac{m^2 - T}{T} = \frac{m^2 - m\,(u+v)}{m\,(u+v)} = \frac{1 - \left(\frac{u}{m} + \frac{v}{m}\right)}{\frac{u}{m} + \frac{v}{m}}.$$

A 8. és a 9. ábrán az $\alpha/2$ illetve $\beta/2$ szöggel rendelkező derékszögű háromszögek hasonlók: $DKC\triangle \sim POA\triangle$, $DHC\triangle \sim BPO\triangle$.



9. ábra.

Ezért $\frac{u}{m} = \frac{r}{x}$, illetve $\frac{v}{m} = \frac{r}{y}$. Továbbá $2T_{ABC\triangle} = (r+x)\,(r+y) = r\,(2x+2y+2r)$, ebből $xy = rx + ry + r^2$. Tehát

$$\frac{t}{T} = \frac{1 - \left(\frac{u}{m} + \frac{v}{m}\right)}{\frac{u}{m} + \frac{v}{m}} = \frac{1 - \left(\frac{r}{x} + \frac{r}{y}\right)}{\frac{r}{x} + \frac{r}{y}} = \frac{xy - rx - ry}{rx + ry} = \frac{r^2}{2rR} = \frac{r}{2R}.$$

(b) Tekintsük az adott AB átfogójú derékszögű háromszögeket (9. ábra). $AOB\sphericalangle = 180° - \alpha/2 - \beta/2 = 135°$, ezért a beírt kör O középpontja az AB szakasz 135°-os látókörének pontja. Az $r = OP$ szakasz az ív felezőpontjában a legnagyobb: $r_{\max} = R \cdot \operatorname{tg} 22{,}5° = R\left(\sqrt{2}-1\right)$. Ezért $\frac{t}{T} = \frac{r}{2R}$ értékkészlete:

$$\left]0; \frac{1}{2}\operatorname{tg} 22{,}5°\right] \quad \text{vagy} \quad \left]0; \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right].$$

3. megoldás:

(a) Az előző ábrák jelöléseit használva:

$$\frac{t}{T} = \frac{m^2 - T}{T} = \frac{m^2 - m\,(u+v)}{m\,(u+v)} = \frac{1 - \left(\frac{u}{m} + \frac{v}{m}\right)}{\frac{u}{m} + \frac{v}{m}} = \frac{1 - \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}.$$

Továbbá

$$\frac{x}{r} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \quad \text{és} \quad \frac{y}{r} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}},$$

ezeket összeadva

$$\frac{2R}{r} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}.$$

Tehát

$$\begin{aligned}
\frac{t}{T} = \frac{r}{2R} \iff \frac{1 - \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} &= \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} \\
1 - \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right) &= \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \\
1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} &= \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \\
\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} &= 1 \\
\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) &= 1.
\end{aligned}$$

Ez pedig igaz, mert $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 45°$. Minden lépés megfordítható, így valóban $\frac{t}{T} = \frac{r}{2R}$.

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{t}{T} &= \frac{1 - \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} - 1 = \frac{\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)} - 1 = \\
&= \frac{2\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{\cos 45° + \cos(45° - \alpha)}{\sqrt{2}} - 1 = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(45° - \alpha) - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ennek a $0 < \alpha < 90°$ intervallumban az értékkészlete $0 < \frac{t}{T} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$, a maximumát $\alpha = 45°$, azaz egyenlő szárú, derékszögű háromszög estén veszi fel.