XXIX. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc

2023. április 21.

10. évfolyam

1. Egy dobozban 25 golyó van, közöttük ugyanannyi piros van, mint kék, és van valamennyi zöld golyó is. Legalább 21-et kell kivenni ahhoz, hogy biztosan legyen a kivettek között mindhárom színből. Hány zöld golyó van a dobozban?

(Katz Sándor, Bonyhád)

2. Az ABC egységoldalú szabályos háromszögnek vegyük fel mindhárom oldalán mindkét harmadolópontját. Legyenek ezek az A csúcstól indulva pozitív forgásirányban haladva P, Q, R, S, T, V. Tekintsük a PRT és a QSV háromszögek közös részét. Milyen síkidom ez? Mekkora a területe?

(Schmidt Edit, Budapest)

3. Hány különböző módon írható fel 2020, mint egymást követő pozitív egészek összege? Adja meg az összegeket.

(Péics Hajnalka, Szabadka és Schmidt Edit, Budapest)

4. Oldja meg az

$$\left.\begin{aligned} x+\frac{x+2y}{x^2+y^2}&=2\\ y+\frac{2x-y}{x^2+y^2}&=0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert a valós számok halmazán.

(Fedorszki Ádám, Beregszász)

5. Bizonyítsa be, hogy bármilyen módon helyezünk el 2023 pontot egy 241×241-es négyzetben, ebből egy 200×200-as négyzettel mindig le lehet fedni legalább 675 pontot.

(Bálint Béla, Zsolna)

6. Az ABC hegyesszögű háromszög C csúcsából induló magasság talppontja az AB oldalon legyen E. Tükrözze az E pontot az AC és a BC oldalakra, a tükörképek legyenek rendre F és G. Az F, C és G pontok köré írt körének az AC oldalegyenessel vett másik metszéspontja legyen P.

(a) Bizonyítsa be, hogy a P, E és G pontok egy egyenesre illeszkednek.

(b) Legyen a D pont a B csúcsból induló magasság talppontja, a kör középpontja K. Bizonyítsa be, hogy a DE egyenes merőleges a PK egyenesre.

(Nemecskó István, Budapest)

Megoldások

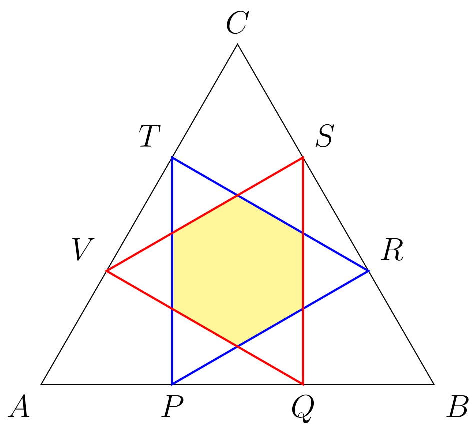
1. **1. megoldás:** Az alábbi táblázatban összefoglaljuk a piros, a kék, a zöld golyók lehetséges darabszámát, illetve meghatározzuk a feladat feltételének megfelelő minimális darabszámot.

piros	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
kék	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
zöld	23	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1
min	25	24	23	22	21	20	19	18	19	21	23	25

Látható, hogy ha legalább 21-et kell kivenni, akkor a zöld golyók száma 15 vagy 5.

2. megoldás: Ha legalább 21-et kell kivenni, akkor 20 kivett golyónál még a maradék 5 golyó lehet azonos színű. Ezért vagy 5 zöld, 10 piros, 10 kék; vagy 5 piros, 5 kék, 15 zöld golyó van.

2. Mindkét háromszög szabályos, a középpontjuk megegyezik az eredeti háromszög középpontjával. Ezen középpont körül a PRT háromszögnek $60°$-os elforgatottja a QSV háromszög. Ebből következik, hogy a metszetük egy szabályos hatszög.



1. ábra.

A PBR háromszög szögei 30, 60 90 fokosak, így $PR = \frac{\sqrt{3}}{3}$, ennek harmada lesz a hatszög oldalhossza. Így annak területe $6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{18}$ területegység.

3. **1. megoldás:** A keresett összeg tagjai 1 különbségű számtani sorozatot alkotnak. A számsorozat felírható, mint $a,\ a+1,\ a+2,\ \ldots,\ a+n-1$. Ezeknek a számoknak az összegére teljesül, hogy

$$\frac{n\,(2a+n-1)}{2} = 2020.$$

Rendezve a fenti egyenlőséget adódik, hogy

$$n\,(2a+n-1) = 2^3 \cdot 5 \cdot 101.$$

Mivel $2a+n-1>n$ és a két szám paritása különbözik, ezért ezeknek a feltételeknek a jobb oldalon szereplő szám következő felbontásai felelnek meg:

$$1\cdot 4040, \quad 5\cdot 808, \quad 8\cdot 505, \quad 40\cdot 101.$$

1. eset: $2a+n-1=4040$ és $n=1$. A megoldás $a=2020$, $n=1$, illetve a triviális sorozat: 2020.

2. eset: $2a+n-1=808$ és $n=5$. A megoldás $a=402$, $n=5$, illetve a sorozat: 402, 403, 404, 405, 406.

3. eset: $2a+n-1=505$ és $n=8$. A megoldás $a=249$, $n=8$, illetve a sorozat: 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256.

4. eset: $2a+n-1=101$ és $n=40$. A megoldás $a=31$, $n=40$, illetve a sorozat: 31, 32, 33, 34, ..., 68, 69, 70.

2. megoldás: Ha páratlan sok $(2k+1)$ tag van, akkor legyen a középső tag (azaz az átlaguk) m, az összeg $(m-k)+\dots+\text{m}+\dots+(m+k)=m(2k+1)=2020$. Tehát $2k+1$ osztója 2020-nak. A páratlan osztók: 1, 5, 101, 505; a megfelelő m értékek: 2020, 404, 20, 4. A harmadik és a negyedik esetben nem kapunk megoldást, mert a tagok közt negatívak is lennének.

Ha páros sok tag van, akkor az átlaguk $m=n+\frac{1}{2}$, ahol n egész, az összeg $\left(m-k+\frac{1}{2}\right)+\dots+\left(m-\frac{1}{2}\right)+\left(m+\frac{1}{2}\right)+\dots+\left(m+k-\frac{1}{2}\right)=k\cdot 2m=k(2n+1)=2020$. Így $2n+1$ lehet 1, 5, 101, 505, azaz m lehet 0,5, 2,5, 50,5 és 252,5. Csak a harmadik és a negyedik eset ad megoldást.

Az összegek: $2020=2020$ (mint egytagú összeg), $2020=402+403+404+405+406$, $2020=249+250+251+252+253+254+255+256$ és $2020=31+\dots+50+51+\dots+70$.

4. 1. megoldás: Könnyen észrevehető, hogy ha $x=0$, akkor $y=1$ megoldás, továbbá $y=0$ nem ad megoldást. A továbbiakban tegyük fel, hogy sem x, sem y nem 0. Szorozzuk meg az első egyenletet y-nal, a másodikat x-szel és adjuk össze:

$$2xy+\frac{xy+2y^2+2x^2-xy}{x^2+y^2}=2y,$$

azaz $2xy+2=2y$, átalakítva $y(1-x)=1$. Mivel $x=1$ ellentmondásra vezet, y kifejezhető $y=\frac{1}{1-x}$ formában. Beírva a második egyenletbe, majd rendezve:

$$\frac{1}{1-x}+\frac{2x-\frac{1}{1-x}}{x^2+\left(\frac{1}{1-x}\right)^2}=0$$

$$\frac{1}{1-x}+\frac{(1-x)\left[2x(1-x)-1\right]}{x^2(1-x)^2+1}=0$$

$$(1-x)^2\left(x^2+2x-2x^2-1\right)+1=0$$

$$-(1-x)^4+1=0.$$

Tehát $1-x=1$ vagy $1-x=-1$, azaz $x_1=0$, $x_2=2$, ezekhez $y_1=1$, $y_2=-1$. Az $x_1=0$, $y_1=1$ megoldást itt ki kell zárnunk, mert feltettük, hogy $x\neq 0$, de ezt a megoldást a legelső észrevétel megtételekor más úton megtaláltuk.

Így egyenletrendszerünk megoldásai : $(0; 1)$ és $(2; -1)$.

2. megoldás: A második egyenletet szorozzuk meg $i = \sqrt{-1}$-gyel és adjuk őket össze, majd rendezzük:

$$x + yi + \frac{x + 2y + 2xi - yi}{x^2 + y^2} = 2,$$

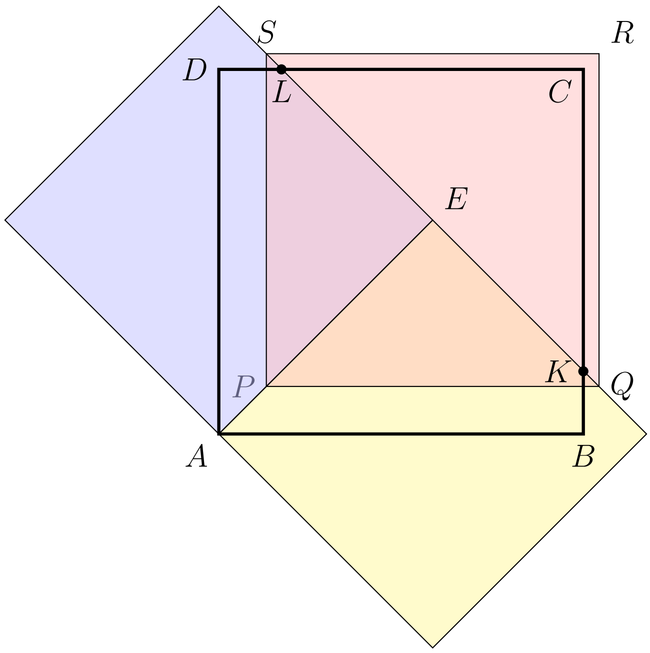
$$x + yi + \frac{x - yi + 2i\,(x - yi)}{(x + yi)\,(x - yi)} = 2.$$

Legyen $z = x + yi$ és egyszerűsítsünk: $z + \frac{1+2i}{z} = 2$, illetve $z^2 - 2z + 1 + 2i = 0$. Megoldva:

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\,(1 + 2i)}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{-2i}}{2} = 1 \pm \sqrt{(1 - i)^2} = 1 \pm (1 - i)\,,$$

vagyis $z_1 = i$, $z_2 = 2 - i$. Az egyenletrendszer megoldásai tehát $(0; 1)$ és $(2; -1)$.

5. Megmutatjuk, hogy az egész 241×241-es négyzetet le lehet fedni 3 darab 200×200-as négyzettel. Egy ilyen lehetséges lefedés látható a 2. ábrán.



2. ábra.

Legyen $ABCD$ az adott 241×241-es négyzet. Az AC átlót az A ponttól 200 egység távolságra lévő E pontban derékszögben metszi egy t egyenes, ennek metszéspontjai a BC illetve a CD oldalakkal legyenek K illetve L. Az $AEKB$ négyszöget lefedjük egy 200×200-as négyzettel (ennek egyik oldala AE). Ennek a 200×200-as négyzetnek a tükörképével lefedjük az $AELD$ négyszöget. Azt kell megmutatnunk, hogy B és D belső pontok. Ehhez elég bizonyítani, hogy a 241×241-es négyzet átlójának fele rövidebb, mint 200.

Számoljunk: $\frac{241\sqrt{2}}{2} < 200$, $241\sqrt{2} < 400$, négyzete $58\,081 \cdot 2 = 116\,162 < 160\,000$, tehát B és D belső pontok.

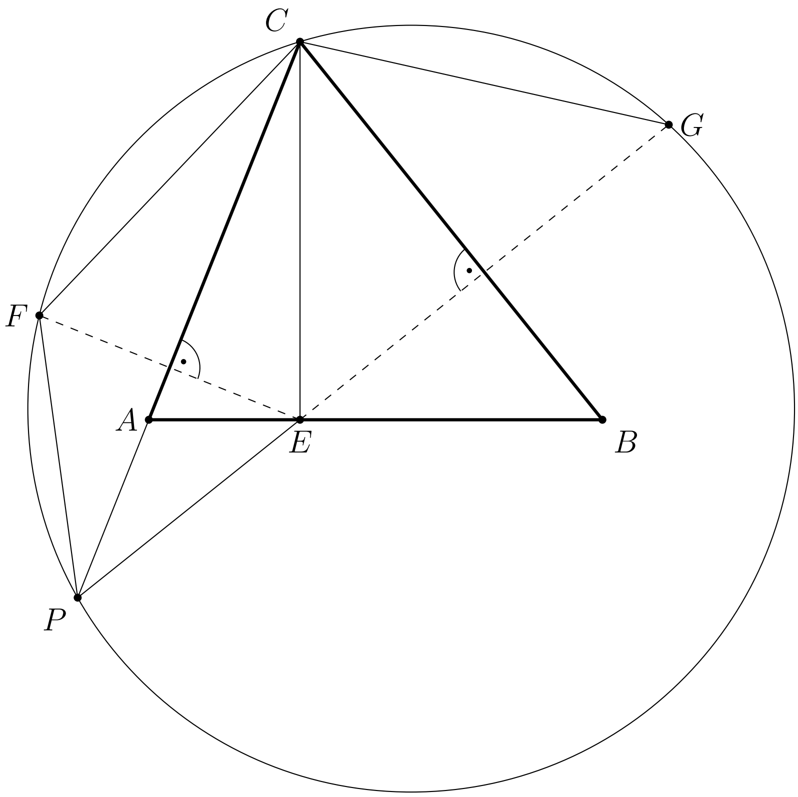
A harmadik, $PQRS$ négyzetet helyezzük el úgy, hogy átlói az AC illetve az LK szakaszokra illeszkedjenek, ez lefedi az eddig lefedetlenül maradt LKC háromszöget. Ehhez elegendő megmutatni, hogy $EQ > EL = EC$, $100\sqrt{2} > 241\sqrt{2} - 200$, azaz $200 > 141\sqrt{2}$. Mivel $40\,000 > 19\,881 \cdot 2 = 39\,762$, ez teljesül. (Az ábra a szemléltetés kedvéért kissé torzított. A számításból látszik, hogy a különbség valójában sokkal kisebb, a harmadik négyzet éppen csak lefedi az LKC háromszöget.)

Az így elhelyezett három négyzet valamelyike biztosan tartalmaz legalább 675 pontot, mivel $2023 = 3 \cdot 674 + 1$.

(Megjegyzés: A harmadik négyzetet elhelyezhetjük úgy is, hogy $R = C$ egybeesik. Ekkor a bizonyítandó állítás, hogy $RS > CL$ vagy $RQ > CK$, amely a fentiekkel analóg módon igazolható.)

6. (a) A tükrözés miatt $CF = CE = CG$, ezért a megfelelő ívekre is igaz, hogy $\overset{\frown}{CF} = \overset{\frown}{CG}$. Azonos ívekhez tartozó kerületi szögek egyenlőségéből $CPG\sphericalangle = CPF\sphericalangle$.

A tükrözés miatt $PE = PF$, ezért az FPE háromszög egyenlő szárú, szimmetriatengelye a CP egyenes, így $CPE\sphericalangle = CPF\sphericalangle$. Mivel $CPE\sphericalangle = CPG\sphericalangle$, ezért P, E és G egy egyenesre esnek.

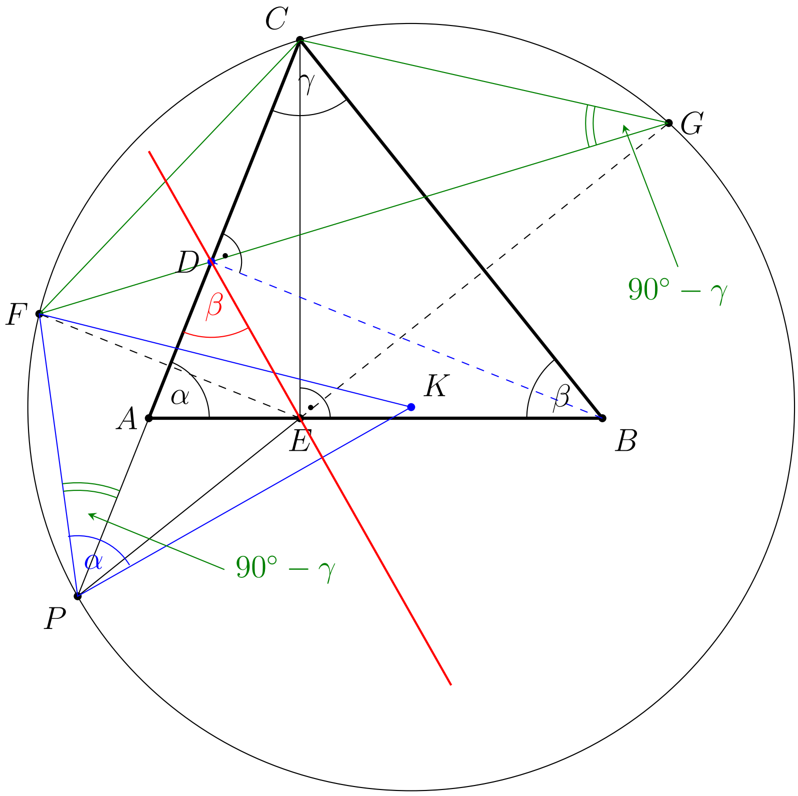


3. ábra.

(b) $ACE\sphericalangle = FCP\sphericalangle = 90° - \alpha$, $FKP\sphericalangle = 180° - 2\alpha$, mert az FP ívhez tartozó középponti szög. Az FKP háromszög egyenlő szárú és szárszöge $180° - 2\alpha$, ezért $FPK\sphericalangle = \alpha$.

A tükrözés miatt $CF = CE = CG$, ezért FCG háromszög egyenlő szárú és szárszöge 2γ, ezért $CGF\sphericalangle = 90° - \gamma$, valamint azonos ívhez tartozó kerületi szögek lévén $CPF\sphericalangle = CGF\sphericalangle = 90° - \gamma$. Ebből $DPK\sphericalangle = \alpha - (90° - \gamma) = \alpha + \gamma - 90°$.

Az $ADE\sphericalangle = \beta$, mert $EDCB$ húrnégyszög (E és D is illeszkedik a BC oldal, mint átmérő fölé szerkesztett Thalész-körre). Ezt felhasználva $PDE\sphericalangle + DPK\sphericalangle = \alpha + \beta + \gamma - 90° = 90°$, így DE egyenes merőleges PK-ra.



4. ábra.