XXIX. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc

2023. április 21.

---

9. évfolyam

1. Egy osztályban karácsony előtt minden fiú adott minden lánynak egy-egy csokit, a lányok mindegyike pedig adott az összes fiúnak egy-egy cukorkát. Az ajándékozás után minden fiú megevett a kapott cukorkák közül kettőt, a lányok mindegyike pedig három csokit. Így elfogyott az édességek negyedrésze. Határozza meg, hogy legfeljebb hány tanulója lehetett az osztálynak.

(Fedorszki Ádám, Beregszász)

2. A teniszben az ún. rövidített játékot (*tiebreak*-et) az a játékos nyeri meg, aki legalább 7 pontot elér, és pontszáma legalább kettővel több, mint a másik játékosé. Dia és Viki mérkőzésén a döntő játszmában rövidítésre került sor. Kezdetben még Dia vezetett 4:2-re, de 5:6-nál már Vikinél volt az előny. Végül a rövidítést 12:10-re Dia nyerte meg, és ezzel ő lett a mérkőzés győztese. A teljes rövidítést tekintve hányféle sorrend szerint szerezhették meg a lányok pontjaikat? (Két sorrendet akkor tekintünk különbözőnek, ha valamelyik labdamenetet nem ugyanaz a játékos nyeri meg.)

(Kornai Júlia, Budapest)

3. Az ABC hegyesszögű háromszögben $AC \neq BC$. Legyen T a háromszög C csúcsához tartozó magasságának talppontja, O pedig a körülírt kör középpontja. Igazolja, hogy az $ATOC$ és a $BTOC$ négyszögek területe egyenlő.

(Fonyóné Németh Ildikó, Keszthely)

4. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\left.\begin{aligned} |x|+|y|+z &= 2021 \\ |x|+y+|z| &= 2023 \\ x+|y|+|z| &= 2025 \end{aligned}\right\}$$

(Bencze Mihály, Brassó)

5. Keresse meg azokat a pozitív egész, összetett számokat, amelyeknek valódi osztóihoz (azaz 1-től és önmaguktól különböző osztóihoz) 1-et hozzáadva megkapjuk egy másik pozitív egész szám összes valódi osztóját.

(Kekeňák Tamás, Kassa)

6. Az $ABCDE$ ötszögben a B és az E csúcsnál lévő szög $90°$, $AB = EA$ és $BC = CD = DE$. A BD és a CE átlók az F pontban metszik egymást. Bizonyítsa be, hogy $AF = AB$.

(Fonyó Lajos, Keszthely)

Megoldások

1. Legyen az osztályba járó fiúk száma x, a lányoké pedig y ($x, y \in \mathbb{Z}^+$). Ekkor

- a fiúk által a lányoknak adott csokik száma: xy,
- a lányok által a fiúknak adott cukorkák száma: xy,
- az ajándékba adott összes édesség száma: $2xy$.

Másrészt

- a lányok által megevett csokik száma: $3y$,
- a fiúk által megevett cukorkák száma: $2x$,
- az összes elfogyasztott édesség száma: $2x + 3y$.

A feladat feltétele szerint:

$$2x + 3y = \frac{1}{4} \cdot 2xy.$$

Az egyenletet rendezve és átalakítva:

$$0 = xy - 4x - 6y,$$
$$24 = (x-6)(y-4).$$

Mivel az $x + y$ kifejezés maximumát keressük, ezért feltételezhetjük, hogy $x - 6$ és $y - 4$ pozitív egész számok. A 24 szorzattá bontási lehetőségeit táblázatba foglalva az alábbi megoldások adódnak:

$x-6$	$y-4$	x	y	$x+y$
1	24	7	28	35
2	12	8	16	24
3	8	9	12	21
4	6	10	10	20
6	4	12	8	20
8	3	14	7	21
12	2	18	6	24
24	1	30	5	35

A táblázat alapján $x + y$ maximális értéke 35. Tehát az osztálynak legfeljebb 35 tanulója lehet.

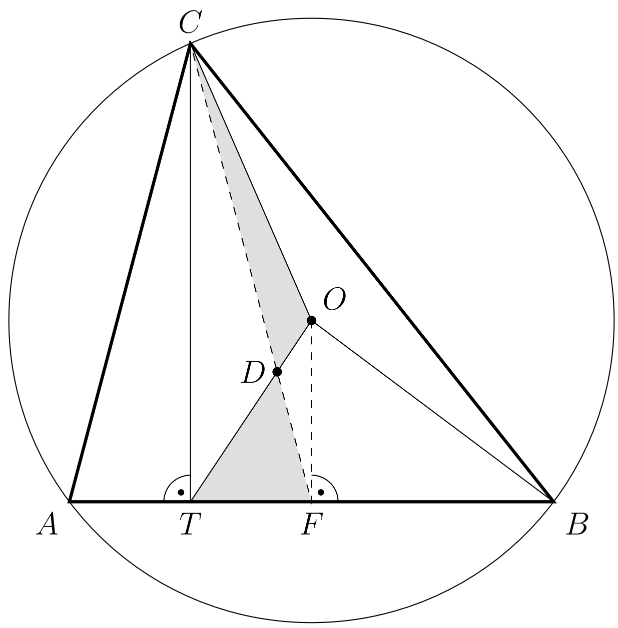
2. A rövidített játék lefolyása az alábbiak szerint alakulhatott:

- Az első 6 labdamenetből Viki kettőt nyert meg. Győztes labdameneteinek sorszámát $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$-féleképpen választhatjuk ki.
- A következő 5 labdamenetből Dia csak 1 pontot szerzett. Megnyert pontját az 5 labdamenetből 5-féleképpen választhatjuk ki.
- A 12. pontot csak Dia nyerhette meg, mivel ellenkező esetben Viki nyerte volna meg a rövidítést 5:7-re.

- A 6:6-os állás után két-két pontonként felváltva szerezhették csak meg a lányok a pontokat, hiszen semelyikük nem tehetett szert legalább kétpontos előnyre. Így az eredmény 6:6, 7:7, 8:8, 9:9, 10:10 lehetett csak a folytatásban. Ezen időszak alatt a lányok a pontokat $2^4 = 16$-féle sorrend szerint nyerhették meg.
- Végül az utolsó két pontot Diának kellett megszereznie, és ezzel fejeződött be a játék.

Mivel a rövidített játék egyes szakaszai egymástól függetlenül alakulhattak a korábbiakban megadott szabályok szerint, ezért a végeredmény $15 \cdot 5 \cdot 16 = 1200$-féleképpen alakulhatott ki.

3. Legyen az AB oldal felezőpontja F, $OT \cap CF = D$. Mivel $CT \perp AB$ és $OF \perp AB$, ezért $CT \parallel OF$ és a $CTFO$ négyszög trapéz.



1. ábra.

$T_{CTO} = T_{CTF}$, mivel a két háromszög CT oldala közös, és az O illetve F pontok egyenlő távolságra vannak a CT egyenestől. Ezt felhasználva:

$$T_{ATOC} = T_{ATDC} + T_{CDO} = T_{ATDC} + T_{TFD} = T_{AFC} = \frac{1}{2} T_{ABC}.$$

(Az utolsó egyenlőség felírásával felhasználtuk, hogy a háromszög súlyvonala felezi a háromszög területét.)

A kapott egyenlőség alapján:

$$T_{BTOC} = T_{ABC} - T_{ATOC} = T_{ABC} - \frac{1}{2} T_{ABC} = \frac{1}{2} T_{ABC}.$$

Ezzel beláttuk, hogy $T_{ATOC} = T_{BTOC}$.

4. Az egyenletrendszer:

$$|x| + |y| + z = 2021 \tag{1}$$
$$|x| + y + |z| = 2023 \tag{2}$$
$$x + |y| + |z| = 2025 \tag{3}$$

A (2) és az (1) egyenletek különbségét képezve:

$$y - |y| + |z| - z = 2,$$
$$|z| - z = 2 + |y| - y \geqslant 2 > 0.$$

Ezt figyelembe véve $|z| > z$, ami alapján $z < 0$ és $|z| = -z$.

A (3) és a (2) egyenletek különbségét képezve:

$$x - |x| + |y| - y = 2,$$
$$|y| - y = 2 + |x| - x \geqslant 2 > 0.$$

Ezt figyelembe véve $|y| > y$, ami alapján $y < 0$ és $|y| = -y$.

Az y és a z előjelének megállapítása után egyenletrendszerünk az alábbi alakban írható fel:

$$|x| - y + z = 2021 \tag{4}$$
$$|x| + y - z = 2023 \tag{5}$$
$$x - y - z = 2025 \tag{6}$$

A (4) és (5) egyenleteket összeadva és a kapott egyenlőséget 2-vel osztva $|x| = 2022$ adódik. A kapott eredményt figyelembe véve az (5) egyenlet alapján $y - z = 1$.

- $x = 2022$ esetén az $y - z = 1$ és a $-y - z = 3$ feltételeket kapjuk, amelyek az $y = -1$ és a $z = -2$ értékek mellett teljesülnek.
- $x = -2022$ esetén pedig az $y - z = 1$ és a $-y - z = 4047$ egyenletekből az $y = -2023$ és a $z = -2024$ értékeket kapjuk.

A kapott számhármasokat ellenőrizve azok teljesítik a feladat feltételeit. Így az egyenletrendszer megoldásai: $M = \{(x; y; z) \mid (2022; -1; -2)\, ; (-2022; -2023; -2024)\}$.

5. Jelölje a keresett pozitív egész, összetett számot n, a valódi osztóinak halmazát $N = \{d_1; d_2; \ldots; d_k\}$ $(d_1 < d_2 < \cdots < d_k)$; jelölje a másik pozitív egész számot m, a valódi osztóinak halmazát pedig $M = \{d_1 + 1; d_2 + 1; \ldots; d_k + 1\}$.

Mivel $d_1 \neq 1$ ezért $d_1 + 1 \neq 2$, így m nem osztható 2-vel, tehát m páratlan szám. Egy páratlan szám összes osztója páratlan szám, ezért az M halmaz elemei páratlan számok, az N halmazé pedig párosak.

A $d_1, d_2, \ldots, d_k$ között nem lehet $p \cdot 2^\ell$, $(\ell \in \mathbb{Z}^+$, p 2-től különböző prímszám) alakú szám sem, mivel ellenkező esetben p is valódi osztója lenne n-nek, és ekkor $p{+}1$ egy páros osztója lenne m-nek. Ez viszont ellentmondana az m paritásáról tett korábbi megállapításunknak.

Eddigi eredményeinket összefoglalva tehát $n = 2^\ell$ $(\ell \in \mathbb{Z}^+)$.

Az ℓ lehetséges értékeit vizsgálva:

(a) $\ell = 1$ esetén $n = 2$, ami nem összetett szám, és így nem felel meg a feladat feltételeinek.

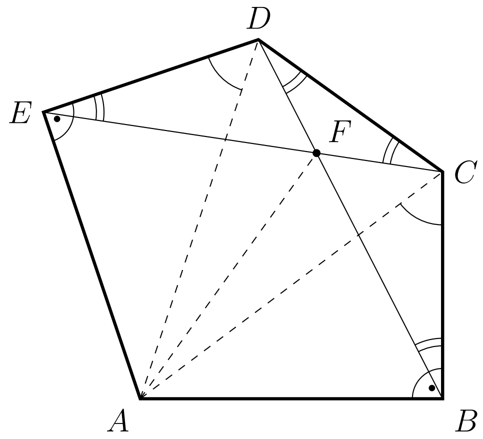
(b) $\ell = 2$ esetén $n = 4$, $N = \{2\}$, $M = \{3\}$ és $m = 9$.

(c) $\ell = 3$ esetén $n = 8$, $N = \{2; 4\}$, $M = \{3; 5\}$ és $m = 15$.

(d) $\ell \geqslant 4$ esetén már nem kapunk újabb megoldásokat, hiszen ekkor $\{2; 4; 8\} \subseteq N$, $\{3; 5; 9\} \subseteq M$; azonban $3|m$, $5|m$ alapján $15|m$ ($15 \in M$) és $14 \in N$ feltételeknek is teljesülnie kellene. Viszont a korábbiakban már megállapítottuk, hogy az N halmaz elemei között nem szerepelhet $p \cdot 2^\ell$ alakú szám.

Tehát a feladat feltételeinek megfelelő számok a 4 és a 8.

6. Készítsünk ábrát:



2. ábra.

A megadott feltételek alapján $AB = EA$, $BC = DE$ és $ABC\sphericalangle = DEA\sphericalangle = 90°$, tehát $ABC\triangle \cong AED\triangle$ (két-két oldal és a közbezárt szög egyenlő). Az egybevágóság alapján $BCA\sphericalangle = EDA\sphericalangle$, $AC = AD$ és az ACD háromszögben $ACD\sphericalangle = ADC\sphericalangle$. Ezt felhasználva:

$$BCD\sphericalangle = BCA\sphericalangle + ACD\sphericalangle = EDA\sphericalangle + ADC\sphericalangle = EDC\sphericalangle.$$

Emellett a $BC = CD = DE$ egyenlőséget is figyelembe véve $BCD\triangle \cong CDE\triangle$ (két-két oldal és a közbezárt szög egyenlő). Az egybevágóság alapján $BD = EC$, $CBD\sphericalangle = CDB\sphericalangle = DCE\sphericalangle = DEC\sphericalangle$, a CDF háromszög egyenlő szárú és $FC = FD$. Ezt felhasználva:

$$BF = BD - FD = EC - FC = EF,$$

és $ABF\triangle \cong AEF\triangle$ (oldalaik páronként egyenlők). Emiatt

$$BFA\sphericalangle = \frac{1}{2} BFE\sphericalangle = \frac{1}{2} DFC\sphericalangle = \frac{1}{2} (180° - 2FCD\sphericalangle) =$$
$$= 90° - FCD\sphericalangle = 90° - DBC\sphericalangle = ABF\sphericalangle.$$

Így az ABF háromszög egyenlő szárú és $AB = AF$. Ezzel az állítást beláttuk.